ACADÉMIE DES SCIENCES.

SÉANCE DU LUNDI 24 MAI 1948.

PRÉSIDENCE DE M. CHARLES JACOB.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS

DES MEMBRES ET DES CORRESPONDANTS DE L'ACADÉMIE.

M. le **Président** souhaite la bienvenue à M. **Jean Timmermans**, Membre de l'Académie Royale de Belgique, qui assiste à la séance.

PHYSIQUE MOLÉCULAIRE. — *Emploi des lames étendues sur le mercure pour l'analyse des positions des pôles attractifs des molécules et du rôle de ces pôles dans diverses propriétés physiques de la matière.* Note (*) de M. **Henri Devaux**.

Une molécule chimique est un corps solide élémentaire constitué par un assemblage d'atomes, en nombre limité, arrangés en des places précises, sous l'influence de leurs attractions réciproques. Il en résulte une cohésion interne, la cohésion intramoléculaire.

Or dans les assemblages constituant les corps à l'état liquide et ceux à l'état solide, il existe une seconde cohésion, intermoléculaire, plus faible sans doute que la précédente, mais qui doit être produite aussi par les attractions des atomes partout où les molécules arrivent au contact. Il doit exister des rapports entre ces deux types de cohésion, rapports de position et rapports de forces. Ces rapports ont été en effet établis par Bragg par les études de structure des cristaux, puis des liquides, au moyen des rayons X, mais beaucoup plus pour l'arrangement, la disposition des particules élémentaires que pour la comparaison des forces de liaisons.

Les observations faites sur les lames minces étendues sur le mercure apportent ici des indications précieuses et variées. Je me bornerai à les énumérer dans le cas particulier des lames de sulfate de cuivre que j'ai spécialement étudiées.

1° L'eau distillée s'étend très mal sur le mercure, mais dès qu'elle contient du SO_4Cu, même à l'état de traces, elle s'étend très vivement. C'est une preuve que le sel est plus fortement attiré par le mercure. L'extension va du

---

(*) Séance du 19 mai 1948.

reste jusqu'à l'établissement en une seule assise, c'est-à-dire à un contact intime des deux espèces de molécules.

2° Or j'ai constaté récemment que, dans cet état, *le sel de cuivre a perdu sa solubilité dans l'eau*, ce qui prouverait que le pôle hydrophile a été bloqué par son union avec le mercure.

3° Cette constatation est rendue difficile par le fait qu'il subsiste *autour* de la molécule saline une affinité pour l'eau, déterminant une fixation d'une couronne de molécules aqueuses et rendant l'ensemble de la lame sensiblement fluide ([1]).

4° Mais un simple rétrécissement de la lame suffit pour expulser cette eau et c'est alors que les molécules du sel, étant amenées en contact latéral intime, donnent une lame absolument rigide, témoignant que *l'état solide est atteint.*

5° Or si l'on envoie sur cette lame de l'air saturé de vapeur d'eau, la rigidité subsiste, l'eau se condensant en buée sur le sel sans le dissoudre, même si la couche d'eau déposée est très épaisse. Le blocage des affinités hydriques est donc complet, chaque molécule du sel a perdu son affinité hydrique principale en se soudant au mercure, puis ses affinités hydriques latérales par la compression artificielle. Il ne lui reste que sa face libre qui est manifestement hydrophobe, incapable de se couvrir d'une couche d'eau continue.

La mise en lame mince d'une molécule de SO_4Cu n'est donc pas un phénomène simple, elle met en cause des couplages de valences variées. Il doit en être de même de la mise en solution proprement dite.

6° C'est ce que montre en effet le sulfate de cuivre sur le mercure. Si au début il y a un excès de sel de cuivre sur ce qui peut garnir le mercure, cet excès reste libre de s'unir soit à l'eau, soit à ses semblables si l'eau vient à manquer. C'est ce qu'on voit au centre des nappes épaisses par la formation spontanée de cristaux disposés en houppes plates très délicates qui finissent par garnir la surface d'un carrelage cristallin tout à fait rigide ([1]). Mais cette nappe solide est restée soluble, elle est fluidifiée dès qu'on envoie sur elle de la vapeur d'eau, tandis qu'à côté les parties minces et monomoléculaires restent absolument rigides et insolubles. Cette manifestation, côte à côte, de deux effets contraires sur deux régions d'une même lame de sulfate de cuivre, l'une mince, l'autre épaisse, est une démonstration éclatante du blocage des affinités hydriques dans la première, celle où il y a contact avec le mercure.

7° Or le contact existant aussi à la face inférieure des parties épaisses, cette face devrait être aussi insolubilisée. J'ai constaté qu'il en était ainsi, quoique la solidité du plancher séparateur ainsi constitué soit moins marquée qu'à l'air libre.

8° Les faits relatés ici pour le SO_4Cu sont en réalité, très généraux. Ils s'appliquent à un grand nombre de substances minérales ou organiques

---

([1]) *Mémoire à l'Académie des Sciences*, 66, 1942.

solubles, capables de s'étendre en lames minces sur le mercure. Toutes présentent trois types d'attraction à l'égard de l'eau : une très forte, verticale, soudant la lame à son support, une très faible, opposée et rendant la surface libre hydrophobe, enfin une troisième, intermédiaire et horizontale, unissant entre elles les molécules de la lame mince. Il est probable du reste que ces directions cruciales ne sont que des résultantes d'attractions divergentes résidant dans chaque molécule. Mais le fait que leurs propriétés soient nettement distinctes, selon trois directions perpendiculaires, est remarquable. Il apporte une clarté inattendue *à la notion même de solubilité* et d'autres propriétés physiques des corps.

9. Pour toutes les substances solubles, c'est une attraction localisée et particulièrement forte qui préside à la mise en solution car, dès qu'elle est bloquée par soudure à du mercure, la substance perd sa *vraie solubilité*. Elle perd en même temps sa *volatilité* si elle est volatile (ex. acide acétique) et sa *cristallisabilité*, car toutes les lames monomoléculaires sont incristallisables. Mais elle conserve des affinités hydriques latérales et par elles une fluidité tangentielle très manifeste qui la ferait prendre pour un liquide. Ce n'est pourtant plus une vraie solution car la quantité d'eau fixée est limitée et il subsiste des vestiges de rigidité ([2]). Enfin la plupart et peut-être la totalité des substances solubles paraissent posséder un pôle hydrophobe qui diminue la solubilité globale sans la faire disparaître.

10. Les attractions externes d'une même molécule diffèrent donc les unes des autres à la fois comme intensité, comme direction et comme régions d'attache. Elles ne résident pas seulement aux deux extrémités d'un axe, elles s'insèrent aussi le long d'une ligne circulaire constituant l'équateur de cet axe. L'existence positive de cette dernière donnée intéresse à la fois les physiciens et les chimistes.

MICROBIOLOGIE. — *De l'action de certains complexes antagonistes sur le virus aphteux.* Note ([*]) de MM. **Gaston Ramon**, **Rémy Richou**, **Jean-Pierre Thiery** et **Alexandre Lucas**.

Poursuivant nos recherches sur les propriétés des complexes antagonistes qui peuvent s'exercer à l'égard des bactéries, des toxines microbiennes, des ultravirus ([1]), nous avons étudié leur action sur le virus aphteux. Dans ce but,

([2]) *Comptes rendus*, **219**, 1944, p. 565; **220**, 1945, p. 538.

([*]) Séance du 19 mai 1948.

([1]) Consulter les *Comptes rendus*, 1944, 1945, 1946, 1947 et la *Revue d'Immunologie*, 1945, 1946, 1947. En ce qui concerne spécialement l'action sur les ultra-virus : G. Ramon et R. Richou, *Comptes rendus*, **225**, 1947 p. 344; G. Ramon, P. Manil et R. Richou, *Comptes rendus*, **226**, 1648 p. 367.

nous avons institué une série d'expériences. Nous rapporterons seulement, ici, l'une d'entre elles.

Dans cette expérience nous avons utilisé, d'une part, un virus aphteux O et, d'autre part, des complexes antagonistes à base soit de subtiline, soit de streptomycine (filtrats de culture *de B. subtilis* et d'*Actinomyces griseus*).

a. Complexe antagoniste à base de subtiline (sub) 126, titrant 500 unités antidotiques et 2 unités antibiotiques par centimètre cube.

b. Complexes antagonistes à base de streptomycine (strep) n° 68 et n° 70, titrant, l'un et l'autre, 50 unités antidotiques et 20 unités antibiotiques.

Deux grammes d'aphtes, prélevés chez des cobayes préalablement inoculés avec le virus, sont finement broyés et repris dans 40^{cm^3} d'eau physiologique tamponnée à pH 7,5. Après centrifugation, l'émulsion obtenue est filtrée sur bougie Chamberland L 3.

Le virus aphteux ainsi obtenu est mélangé à parties égales avec l'un ou l'autre des complexes antagonistes. Après un temps de contact de 24 heures à 26° ou de 24 heures à la température du laboratoire (15°), les divers mélanges sont éprouvés par injection dans le coussinet plantaire de la patte postérieure droite du cobaye. Trois cobayes sont soumis à l'injection de chaque mélange, de telle manière que chacun d'entre eux reçoit une quantité de virus représentant au minimum 10 doses infectantes de virus.

D'un autre côté, des cobayes servant de témoins reçoivent une quantité équivalente du virus, seul, ayant séjourné 24 heures à la température de 26°.

Les animaux sont examinés au bout de 18, de 24, de 48 heures, de 4 et 6 jours, et l'on note pour chaque cobaye les diverses constatations ainsi faites :

Aphte primaire apparaissant au siège de l'inoculation (a. p.);

Aphte secondaire à la patte opposée (a. s.);

Généralisation caractérisée par des aphtes au niveau de la muqueuse linguale (g.);

Aucune lésion (o).

Les constatations de l'expérience sont sommairement indiquées, ainsi que les résultats enregistrés dans le tableau ci-dessous :

	Mélanges injectés.		Lésions observées après 18 h.	24 h.	48 h.	4 jours.	6 jours.
1.	Virus aphteux + Complexe sub. n° 126	après 24^h à 26°.	o	o	o	o	o
			o	o	o	o	o
			o	o	o	o	o
2.	Virus aphteux + Complexe sub. n° 126	après 24^h à 15°.	o	o	o	o	o
			o	o	o	a. p.	g.
			o	a. p.	a. p.	a. s.	g.
3.	Virus aphteux + Complexe strep. n° 68	après 24^h à 26°.	o	o	a. p.	a. p.	g.
			o	a. p.	a. s.	g.	g.
			a. p.	a. p.	a. s.	g.	g.
4.	Virus aphteux + Complexe strep. n° 70	après 24^h à 26°.	o	a. p.	a. s.	g.	g.
			a. p.	a. p.	a. s.	g.	g.
			a. p.	a. p.	a. s.	g.	g.
5.	Virus aphteux au 1/40	après 24^h à 26°.	a. p.	a. p.	a. s.	g.	g.
	» 1/200		a. p.	a. p.	a. s.	g.	g.
	» 1/400		?	a. p.	a. p.	g.	g.

De cette expérience et d'autres analogues ayant abouti à des observations identiques, il ressort que le virus aphteux est entièrement détruit *in vitro*, lorsque l'on fait agir sur lui le complexe à base de subtiline pendant 24 heures à la température de 26°. Cette destruction n'est que partielle à la température de 15° durant le même temps.

Le complexe antagoniste à base de streptomycine semble n'avoir (du moins l'échantillon dont nous nous sommes servis) qu'une influence limitée sur le virus aphteux.

Des constatations que nous avons faites antérieurement, dans des essais du même genre, mais réalisés avec d'autres virus ([2]), il semble bien résulter que cet effet virulicide de certains complexes antagonistes est dû à des propriétés enzymatiques dont il importe de préciser, par une analyse plus complète des phénomènes en jeu, la nature exacte et le mode d'action sur les virus. Une telle analyse pourra, en outre, permettre d'obtenir des renseignements intéressants sur la constitution même de divers ultra-virus pathogènes pour l'homme, les animaux ou les végétaux.

HYGIÈNE. — *Application des relations de probabilité aux statistiques de contamination tuberculeuse.* Note (*) de MM. **Georges** et **Jean-Antoine Reboul.**

Le problème est le suivant : des individus végètent dans un milieu infecté, combien parmi eux seront ils contaminés au bout d'un temps t?

Soit N le nombre de sujets qui, au temps t, n'ont encore subi aucune atteinte; pendant le temps dt, dN d'entre eux sont touchés, et comme c'est le hasard qui les désigne, on a la relation de probabilité

$$\frac{dN}{N} = \beta, \frac{dt}{t} = -\alpha\, dt.$$

Le coefficient positif α définit la *susceptibilité* des sujets pour la maladie considérée; il peut être une constante ou une fonction de divers facteurs, notamment de la durée d'exposition des sujets.

L'intégration de cette équation donne la solution du problème; pour la faciliter, plusieurs hypothèses sont possibles.

a. La susceptibilité est constante, la formule est alors exponentielle

$$N = K\, e^{-\alpha t}$$

b. La susceptibilité diminue avec la durée t d'exposition, elle lui est, par exemple, inversement proportionnelle, la formule est hyperbolique

$$N = K\, t^{-a}.$$

([2]) *Loc. cit.*

(*) Séance du 19 mai 1948.

Dans ce dernier cas, la susceptibilité serait infinie au début de l'observation ($t = 0$), ce qui est peu vraisemblable; au moment de leur introduction dans le champ d'infection, les sujets présentent une certaine susceptibilité α_0 comme s'ils étaient dans le champ depuis un temps t_0 tel que $\alpha_0 = b/t_0$, et les formules indiquées s'écrivent

$$N = K e^{-\alpha t} \quad \text{et} \quad N = K(t + t_0)^{-a}.$$

Les résultats donnés par les statistiques permettent de choisir entre ces deux formules et les hypothèses qui leur correspondent.

1. Prenons d'abord le cas présenté par M. E. Rist à l'Académie de Médecine en janvier 1938.

Les jeunes filles admises à l'École d'infirmières de la Salpêtrière sont éprouvées, par cutiréaction, à la tuberculine. Celles qui antérieurement ont subi une contamination tuberculeuse présentent une cuti positive. Celles dont la cuti est négative sont considérées comme n'ayant jamais éprouvé d'atteinte tuberculeuse; elles sont soumises, pendant leurs deux années d'études, à un examen suivi et à des cuti répétées. Le nombre de celles dont la cuti continue à se montrer négative représente, au temps t, le nombre N des sujets indemnes. On compare les résultats observés avec ceux que l'on calcule en utilisant l'une ou l'autre des formules précédentes :

Temps (mois)........	2.	9.	16.	25.
Cuti négat. obser...........	60	31	23	16
» calcul hyperbolique....	60	30	21	16
» » exponentiel....	60	37	23	12

Les valeurs des constantes utilisées sont $t_0 = 2,5$ et $a = 0,73$ pour la formule hyperbolique et $\alpha = 0,068$ pour la formule exponentielle. C'est la première qui paraît le mieux convenir.

2. Considérons maintenant le cas de la contamination, en fonction de leur âge, de sujets végétant dans des milieux sociaux divers; le problème se traite comme le précédent et donne les mêmes formules pour le nombre N des contaminés aux divers âges t.

Les formules ont été appliquées à diverses statistiques françaises dressées par M[lle] Mioche, MM. Lesné-Trousseau, Nobécourt-Briskas, Lelong-Nadeuf, Lereboullet-Gavin. Elles ont donné pour des valeurs un peu différentes des constantes des résultats analogues, la formule hyperbolique s'étant toujours montrée supérieure à l'exponentielle. Ainsi, la statistique établie par M[lle] Mioche donne, avec $t_0 = 7$, $a = 1,45$ et $\alpha = 0,054$:

Age (ans).......	0-1.	1-2.	4-5.	6-7.	9-10.	14-15.
Cuti négat. observée.........	89,2	75,7	51	42	28	20,3
» calcul hyperbolique.....	89,2	75,2	49,5	39,6	29,9	20,6
» » exponentiel.....	89	79	54	42	28	15

C'est bien la formule hyperbolique qui paraît le mieux marcher.

3° Les statistiques américaines, un peu plus complètes, donnent des résultats plus intéressants. Elles montrent que les pourcentages observés pour les cuti négatives tendent vers une valeur asymptote quand continue à croître l'âge des sujets. Les formules données plus haut sont l'une et l'autre insuffisantes, elles doivent être complétées et s'écrire

$$N = K(t + t_0)^{-a} + N'_\infty \quad \text{et} \quad N = K e^{-\alpha t} + N_\infty.$$

La statistique de Wells Smith donne, en prenant $t_0 = 7$, $a = 1$, $N'_\infty = 0,9$ pour la première et $\alpha = 0,15$, $N_\infty = 2,4$ pour la deuxième :

Age (ans).....	2	3,6	6	8	12	19	25	30	40	60
% observés....	82	60	40	29	16	9	5	4	2,8	2,4
» cal. hyp....	80,9	60,9	39,1	29,3	16,9	9,8	6	4,9	3,5	2,4
» cal. exp....	82,4	65,4	46,4	35	20,4	8,7	5	3,8	2,7	2,4

Pour des âges inférieurs à une quinzaine d'années, c'est la formule hyperbolique qui rend le mieux compte des résultats; pour des âges plus avancés c'est la formule exponentielle. On en conclut que la susceptibilité diminue d'abord en raison inverse de la durée d'exposition des sujets, puis tend vers une valeur constante quand cette durée augmente.

En conséquence on peut affirmer que, pour la tuberculose et vraisemblablement pour les autres maladies infectieuses, la contamination se produit suivant une loi de hasard dirigé dont les principales directives sont les suivantes : 1° La susceptibilité morbide des sujets exposés à la contamination diminue avec la durée de leur exposition, puis tend vers une valeur constante; 2° La présence prolongée de sujets dans un champ d'infection immunise un certain nombre d'entre eux; 3° Enfin la susceptibilité, et ses variations, dépend d'un certain nombre de constantes caractéristiques des sujets, du milieu et de la maladie particulière examinée.

DÉSIGNATIONS.

MM. **Albert Portevin** et **Pierre Chevenard** sont désignés pour représenter l'Académie à la Cérémonie de la pose de la première pierre des Laboratoires de recherches de l'**Institut de Recherches de la Sidérurgie**, qui aura lieu à Saint-Germain-en-Laye, le 5 juin 1948.

PLIS CACHETÉS.

M. **Jacques Bergier**, les héritiers de MM. **André Helbronner** et **Alfred Eskenazi** demandent l'ouverture de trois plis cachetés déposés conjointement par ces trois auteurs, reçus dans les Séances des 27 mars, 15 avril et 27 mai 1940 et enregistrés sous les nos 11.686, 11.694 et 11.712.

Ces plis, ouverts en séance par M. le Président, contiennent les Notes suivantes : Pli n° 11.686, *Possibilité de produire une réaction en chaîne dans une*

masse d'uranium 238. Pli n° 11.694, *Argumentation;* 1re Partie : *Réaction en chaîne dans un mélange d'uranium et de deuterium;* 2e Partie : *Entretien d'une réaction en chaîne dans un mélange d'uranium et de beryllium.* Pli n° 11.712, *Étude d'un centre d'énergie à base d'uranium, Calcul du rayon critique, Possibilité d'une désintégration du deuton par les ions rapides de fission, Remarque sur le rayon critique d'une masse uranifère, Possibilité d'obtenir une émission de neutrons en bombardant des noyaux lourds par des ions rapides de fission.*

(Renvoi à la Section de Physique générale.)

CORRESPONDANCE.

Le Conseil d'Administration de l'**Académie Polonaise des Sciences et des Lettres** invite l'Académie à se faire représenter aux Cérémonies qui auront lieu à Cracovie, à la fin de septembre 1948, à l'occasion du soixante-quinzième anniversaire de cette Académie.

ALGÈBRE. — *Théorie non abélienne des corps de classes pour les extensions galoisiennes des corps de nombres algébriques : forme définitive de la loi d'existence.* Note (*) de M. **Marc Krasner**, présentée par M. Élie Cartan.

Je conserve les notations de mes Notes précédentes ([1]). $\mathfrak{f}_{K'/k}$ est une puissance fractionnaire d'un idéal de K', et la contribution d'un idéal premier $\mathfrak{P}'$ de K' dans $\mathfrak{f}_{K'/k}$ est égale au conducteur de l'extension locale et n'est pas (1) si, et seulement si $\mathfrak{P}'$ est ramifié dans K'/k (loi de ramification). $\mathfrak{f}_{K'/k}$ est le p. g. c. d. des idéaux $\mathfrak{Q}$ de $K^{(f)}$ tels que, pour tout $\alpha \in K'$, il existe un $\beta \in K^{(f)}$ tel que $\alpha \rightrightarrows \beta$ (s-mod $\mathfrak{Q}$) et que $K'(\beta)/k(\beta)$ soit ramifiée. Si $\mathfrak{f}_{K'/k} \| \mathfrak{Q}$, il existe des $\alpha \in K'$ tels que $\alpha \rightrightarrows \beta$ (s-mod $\mathfrak{Q}$; f) entraîne $k(\beta) \supseteq k(\alpha)$.

Si $\alpha \in K^{(f)}$, les ensembles $\vec{C}(\alpha, \mathfrak{Q})$ et $C(\alpha, \mathfrak{Q})$ des $\beta \in K^{(f)}$ tels que $\alpha \rightrightarrows \beta$ ou $\equiv \beta$ (s-mod $\mathfrak{Q}$; f) seront dits la *semi-classe* et la *classe de* α (mod $\mathfrak{Q}$; f). Si α est f-discriminantiel (mod $\mathfrak{Q}$), $C(\alpha, \mathfrak{Q})$ est dite *discriminantielle* et si, en plus, $\mathfrak{Q} \| \mathfrak{f}_{K'/k}$, où $K' = k(\alpha)$ et α est premier à $\mathfrak{Q}$, elle est dite *normale*, auquel cas elle est l'ensemble des $\beta \in \vec{C}(\alpha, \mathfrak{Q})$ tels que $[k(\beta) : k] = (K' : k)$, et, pour les $\beta \in C = C(\alpha, \mathfrak{Q})$, $k(\beta) = K'$ ne dépend que de C et sera noté K_C. Deux classes normales C et C' (mod $\mathfrak{Q}$; f) sont dites *équivalentes* si $K_C = K_{C'}$, ce qui, vu la conséquence 5 de la loi de monodromie, équivaut à $k(\alpha_{\mathfrak{p}}) = k(\alpha'_{\mathfrak{p}})$ pour tous les $\mathfrak{P} | \mathfrak{f}_{K^{(f)}/k} \Delta_{K^{(f)}/k}$, où $\alpha \in C$ et où $\alpha' \in C'$, et se vérifie finiment. Si la classe normale C (mod $\mathfrak{Q}$; f) est discriminantielle, l'idéal $\mathfrak{q}$ tel que $(\mathfrak{q})_k^{\alpha} = \mathfrak{Q}$

(*) Séance du 19 mai 1948.

([1]) *Comptes rendus*, 225, 1947, p. 785, 973, 1113; 226, 1948, p. 535, 1231.

ne dépend pas du choix de $\alpha \in C$, et sera noté $[\mathfrak{Q}]^{k}_{K'}$, et C est une classe (mod $\mathfrak{q}\{\Delta_{K(f)}\}$) dans $K' = K_C$. Les produits CC' de telles classes dans K′ le sont aussi et forment le groupe multiplicatif $A_C(\mathfrak{Q}, f)$ des classes (mod $\mathfrak{q}\{\Delta_{K(f)}\}$) des nombres de $K' = K_C$ premiers à $\mathfrak{Q}$. $E_C(\mathfrak{Q}, f)$ étant le groupe des $C' \in A_C(\mathfrak{Q}, f)$ contenant quelque unité de K′, et $U_C(\mathfrak{Q}, f)$ étant celui des $C' \in A_C(\mathfrak{Q}; f)$ contenues dans la classe de 1 (mod $\mathfrak{q}$), le quotient $A^{*}_C(\mathfrak{Q}, f)$ de $A_C(\mathfrak{Q}, f)$ par $E_C(\mathfrak{Q}, f)U_C(\mathfrak{Q}, f)$ est le groupe des classes (mod $\mathfrak{q}$) des idéaux principaux premiers à $\mathfrak{Q}$ de K_C. $\mathcal{J}$ étant une classe des idéaux de K′ (mod $\mathfrak{q}$), un triple $(\mathfrak{A}, \alpha, \beta)$, où $\mathfrak{A}$ est un idéal de K′, et où α, β sont des éléments de K′ f-discriminantiels (mod $\mathfrak{Q}$) sera dit un *représentant de* $\mathcal{J}$ si $\mathfrak{A}(\alpha\beta) \in \mathcal{J}$. $(\mathfrak{A}, \alpha, \beta)$ et $(\mathfrak{A}', \alpha', \beta')$ sont dits *équivalents* quand ils sont représentants d'une même classe (mod $\mathfrak{q}$), ce qui a lieu si et seulement s'il existe un $\mu \in K'$ et une unité ε de K′ tels que $\mathfrak{A}' = (\mu)\mathfrak{A}$ et que $\alpha\beta \equiv \varepsilon\mu\alpha'\beta'$ (mod $\mathfrak{q}$) et peut se décider finiment. Si γ, $\gamma' \in K'$ sont f-discriminantiels (mod $\mathfrak{Q}$) et tels que $\alpha\beta\alpha'\beta' = \gamma\gamma'$, on pose $(\mathfrak{A}, \alpha, \beta)(\mathfrak{A}', \alpha', \beta') \sim (\mathfrak{A}\mathfrak{A}', \gamma, \gamma')$. Le groupe multiplicatif $\mathcal{J}_C(\mathfrak{Q}, f)$ des classes (mod $\mathfrak{q}$) des idéaux de K_C premiers à $\mathfrak{Q}$ s'identifie avec celui des classes d'équivalence de triples ainsi multipliées, et l'on peut former finiment un système complet de leurs représentants et leur tableau de multiplication.

K″ étant une extension abélienne de $K' = K_C$ soient $\mathfrak{Q}$ un idéal de K′ tel que $\mathfrak{f}_{K'/k} \| \mathfrak{Q}$ et que $\mathfrak{q} = [\mathfrak{Q}]^{k}_{K'} | \mathfrak{f}_{K''/K'}$ et $H_{K''/K'}$ le groupe de Takagi de K″/K′ défini (mod $\mathfrak{q}$). Alors, en vertu de la théorie abélienne des corps de classes, les éléments irréductibles de l'anneau de Takagi $\mathfrak{T}^{K''/K'}$ de K″/K′ sont en correspondance biunivoque avec les caractères χ de $\mathcal{J}_C(\mathfrak{Q}; f)/H_{K''/K'}$ à savoir, à χ correspond $r_\chi \in \mathfrak{T}_{K''/K'}$ tel que, pour tout idéal $\mathfrak{A}$ de K′ premier à $\mathfrak{Q}$, on ait $r_\chi(\mathfrak{A}') = [\chi(\mathcal{J})]$, où $\mathfrak{A}' \in \mathcal{J} \in \mathcal{J}_C(\mathfrak{Q}; f)$ [on identifie χ à un caractère de $\mathcal{J}_C(\mathfrak{Q}; f)$]. K_χ étant le corps de classes pour le groupe des idéaux $\mathfrak{A}'$ de K′ tels que $\chi(\mathfrak{A}') = 1$, K_χ et le conducteur $\mathfrak{f}^{(\chi)}_k$ de K_χ/k sont dits le *corps* et le *conducteur par rapport à k de* χ. α étant un élément de K′, on sait qu'on peut construire finiment un associé $\alpha' = [a'(x), f(x)]$ de α dans K′ tel que tous les coefficients de $f_{\alpha'/k}(x)$ soient bornés en fonction de $N(\alpha)$ et du régulateur de K′, donc tel que, pour $f(x)$ fixe, les coefficients de $a'(x)$ soient bornés en fonction de $N(\alpha)$. $\mathfrak{p}$ étant un idéal premier de k et χ étant un caractère de $\mathcal{J}_C(\mathfrak{Q}; f)$, la valeur de $r_\chi(\mathfrak{P}')$ pour les facteurs premiers $\mathfrak{P}'$ de $\mathfrak{p}$ dans K′ se calcule finiment, car il existe un idéal $\mathfrak{A}'$ de K′ tel que $N(\mathfrak{A}') \leqq \sqrt{D_{K'}}$ et que $\mathfrak{A}'\mathfrak{P}'$ soit principal; si $\mathfrak{A}'\mathfrak{P}' = (\alpha)$, on a $N(\alpha) \leqq N(\mathfrak{p})^{n'}\sqrt{D_{K'}}$, α possède un associé $\alpha' = [a'(x), f(x)]$, où les coefficients de $a'(x)$ sont bornés en fonction de $N(\mathfrak{p})$, et l'on a $\mathfrak{P}' = \mathfrak{A}^{-1}(\alpha')$; donc, la classe de $\mathfrak{P}'$ (mod $\mathfrak{q}$) se détermine par un nombre fini d'essais. Les induites $r^{(\chi)}_k$ par $\mathfrak{A}' \to N_{K'/k}(\mathfrak{A}')$ des r_χ sont dites les représentations *monomiales*. Pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de k, $r^{(\chi)}_k(\mathfrak{p})$, qui est une matrice de degré $(K' : k)$, dit le *degré* de $r = r^{(\chi)}_k$, et noté $n(r)$, se calcule finiment. On montre que quand $r^{(\chi)}_k = r^{(\eta)}_k$, K_χ et K_η sont conjugués dans $K^{(f)}/k$.

Donc, si $r = r_k^{(\chi)}$, $\mathfrak{f}_k^{(\chi)}$ ne dépend, à θ-équivalence près, que de r; il sera noté $\mathfrak{f}_r$ et dit le *conducteur de r*.

Soit $U(f)$ un ensemble fini d'idéaux premiers de k telle que, pour toute classe X d'éléments conjugués de $g_{K^{(f)}/k}$, il existe un $\mathfrak{p} \in U(f)$ tel que $< K/k;\ \mathfrak{p} > = X$, où $K = K^{(f)}$. Un $r = r_\Gamma \in \mathfrak{C}_{K/k}$ est déterminé par sa restriction r_f à $U(f)$, car sa donnée détermine les caractères de Γ. $(r \pm r')_f$ et $(r \times r')_f$ sont égaux aux $r_f + r'_f$ et $r_f \times r'_f$ et r est positive si, et seulement si r_f l'est. En vertu du théorème de Brauer, $\mathfrak{C}_{K/k}$, en tant que module, est engendré par ses éléments monomiaux. On a $r = r_k^{(\chi)} \in \mathfrak{C}_{K/k}$ si, et seulement si $K_\chi \subseteq K$, autrement dit si $\chi = 1$ sur $H_{K/K'}$, et on a $\mathfrak{f}_r | \mathfrak{f}_{K/k}$. Comme les $H_{K/K'}$, où $K' \supseteq k$, peuvent se construire finiment, on peut construire finiment toutes les restrictions à $U(f)$ des $r \in \mathfrak{C}_{K/k}$ monomiaux et décider finiment, pour chaque fonction bimatricielle définie sur $U(f)$, si elle est un r_f, $r \in \mathfrak{C}_{K/k}$.

On montre que, $\mathfrak{f}$ étant un idéal entier de k et n étant un entier positif, il n'existe qu'un ensemble fini des $r = r_k^{(\chi)} \in R_k$ tels que $\mathfrak{f}_r | \mathfrak{f}$ et que $n(r) \leqq n$. On peut former finiment un polynome $f = f(\mathfrak{f}, n) \in S_k$ définissant le composé $K(\mathfrak{f}, n)$ des K_χ correspondants. Tous les $r \in R_k$ monomiaux tels que $\mathfrak{f}_r | \mathfrak{f}$ et $n(r) \leqq n$ étant $\in \mathfrak{C}_{K(\mathfrak{f}, n)/k}$, la réunion de tous les $\mathfrak{C}_{K(\mathfrak{f}, n)/k}$ est R_k. Si $r \in \mathfrak{C}_{K(\mathfrak{f}, n)/k}$ et si $r_{\mathfrak{f}, n}$ est $r_{f(\mathfrak{f}, n)}$, le triple $(\mathfrak{f}, n, r_{f,n})$ est dit la $(\mathfrak{f}, n)$-*figuration* de r, et l'on note F_k l'ensemble des figurations des $r \in R_k$. On peut décider finiment si un triple $[\mathfrak{f}, n, \varphi(\mathfrak{p})]$ est la $(\mathfrak{f}, n)$-figuration de quelque $r \in R_k$ et, dans l'affirmative, calculer finiment $r(\mathfrak{p})$ pour tout $\mathfrak{p}$ premier à $\mathfrak{f}$. Les figurations $(\mathfrak{f}, n, r_{\mathfrak{f}, n})$, $(\mathfrak{f}', n', r_{\mathfrak{f}', n'})$ des r, $r' \in R_k$ sont dites *équivalentes* si $r \sim r'$, ce qui se décide finiment car, si $\mathfrak{f}^\star$ est un multiple des $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{f}'$ et si $n^\star \geqq \text{Max}(n, n')$, on a $r \sim r'$ si, et seulement si leurs valeurs coïncident sur $U\big(f(\mathfrak{f}^\star, n^\star)\big)$. R_k s'identifie avec le quotient de F_k par cette équivalence, organisé par l'addition et la multiplication de figurations et la relation de leur positivité indiqués plus haut, ce qui le caractérise à partir de k et complète la loi d'existence.

ALGÈBRE. — *Réticulés distributifs de dimension linéaire* N.

Note (*) de M. **Antonio Monteiro**, présentée par M. Élie Cartan.

1. *Dimension linéaire.* — Soit R un réticulé distributif. D'après un théorème de G. Birkhoff, R est isomorphe à un anneau d'ensembles ([1]). Si R est une algèbre de Boole, on obtient comme cas particulier le théorème de représentation de M. H. Stone ([2]). Le théorème de G. Birkhoff nous donne une représentation de R comme un sous-réticulé d'un produit de chaînes chacune desquelles contient deux éléments 0 et 1 (chaînes minimales ou irréduc-

(*) Séance du 19 mai 1948.

([1]) G. Birkhoff, *Lattice Theory*, 1940, p. 80.

([2]) *Trans. Amer. Math. Soc.*, 40, 1936, p. 37-111.

tibles). Chaque axe contenant seulement deux coordonnées pour décrire un élément de R, on doit utiliser un grand nombre de coordonnées. Dans le cas du plan euclidien (considéré comme le réticulé produit de la droite par elle-même) chaque point a une infinité de coordonnées de cette nature.

On peut se placer à un autre point de vue et chercher des axes ayant les coordonnées nécessaires pour décrire un élément de R au moyen du plus petit nombre possible de coordonnées. Cela peut nous conduire naturellement à considérer un produit R^n de n chaînes (chacune desquelles contient au moins deux éléments) comme un réticulé de *dimension linéaire* n [3] et à dire qu'un réticulé (distributif) R a la dimension linéaire n si R est isomorphe à un sous-réticulé d'un R^n et n'est isomorphe à aucun sous-réticulé d'un R^{n-1}.

Ces définitions étant posées il s'agit maintenant de chercher une caractérisation intrinsèque de la notion de dimension linéaire.

2. *Arithmétique des filtres.* — Il est naturel de chercher à traduire d'une façon convenable les propriétés d'un réticulé R dans l'arithmétique des filtres premiers de R. Nous avons envisagé récemment [4] une représentation de chaque filtre de R comme intersection des filtres premiers minimaux qui contiennent le filtre donné. Cette représentation d'un filtre F, dite minimale, est univoquement déterminée dans le cas où elle ne fait intervenir qu'un nombre fini n de filtres premiers minimaux. Nous dirons alors que F est d'ordre n. S'il existe dans R un filtre d'ordre n et si tous les autres filtres sont d'ordre $\leqq n$, nous dirons que R a une arithmétique d'ordre n. On peut démontrer le résultat suivant :

1° *Pour qu'un réticulé distributif* R *ait la dimension linéaire* n, *il faut et il suffit que l'arithmétique des filtres de* R *soit d'ordre* n.

La démonstration fait intervenir l'axiome du choix. Les axes coordonnés sont n chaînes maximales de filtres premiers de R choisies d'une façon convenable (à chacune desquelles on ajoute d'ailleurs le réticulé R, qui joue le rôle de coordonnée o sur chaque axe).

L'ordre de l'arithmétique de R peut être défini d'une autre manière. Il suffit de considérer l'ordre des filtres principaux de R. S'il existe un filtre principal d'ordre n et si tous les autres filtres principaux ont un ordre $\leqq n$, alors l'arithmétique des filtres de R est d'ordre n et réciproquement.

3. *Caractérisation intrinsèque de la dimension linéaire.* — Nous dirons que n éléments de R : $x_1, \ldots, x_n$ sont indépendants si le supremum de ces éléments n'est pas égal au supremum de $n-1$ d'entre eux [5]. Un élément x de R a le degré d'indépendance n si n est le nombre maximum d'éléments indépendants dont le supremum est x. Nous dirons que R a le degré d'indé-

---

[3] O. Ore, *Ann. Math.*, 47, 1946, p. 68.

[4] *Comptes rendus*, 225, 1947, p. 846-848.

[5] R. P. Dilworth, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 49, 1941, p. 327, note [6].

pendance n, si R contient un élément dont le degré d'indépendance est n, tous les autres éléments de R ayant un degré d'indépendance $\leq n$. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que les deux conditions suivantes soient vérifiées :

I. R *contient n éléments indépendants.*

II. $n+1$ *éléments de* R *sont toujours dépendants.*

Dans ces définitions on a fait intervenir seulement l'opération $\cup$; il existe donc deux degrés d'indépendance : un $d(R, \cup)$ par rapport à $\cup$, l'autre $d(R, \cap)$ par rapport à $\cap$. Dans les réticulés distributifs on a toujours $d(R, \cup) = d(R, \cap)$.

Nous pouvons maintenant indiquer une caractérisation intrinsèque simple de la dimension linéaire d'un réticulé distributif R.

2° *Pour qu'un réticulé distributif* R *soit de dimension linéaire n il faut et il suffit que les conditions* I *et* II *soient vérifiées.*

La dimension linéaire étant définie par les conditions I et II, la difficulté essentielle consiste à montrer que R est isomorphe à un sous-réticulé d'un produit de n chaînes, car il est évident qu'il ne peut pas en être ainsi pour un nombre plus petit de chaînes. Pour le démontrer nous utilisons le résultat 1° indiqué au n° 2.

L'introduction de la représentation minimale des filtres de R se trouve ainsi justifiée et aura peut-être un rôle à jouer dans l'étude des réticulés distributifs plus généraux que ceux de dimension linéaire n.

ALGÈBRE. — *Domaines d'intégrité où tout idéal est quasi primaire.*
Note de M. **Ladislas Fuchs**, présentée par M. Élie Cartan.

Dans un travail précédent [1] j'ai introduit la notion des idéaux quasi primaires (noté q. p.) et j'ai démontré que, pour édifier la théorie abstraite des idéaux, ils peuvent remplacer avec beaucoup d'avantages les idéaux primaires employés jusqu'à présent. La bonne maniabilité des idéaux q. p. nous suggère d'étudier les anneaux qui ne contiennent que des idéaux q. p. (appelés désormais des *anneaux* q. p.). Dans cette Note je n'envisage que des domaines d'intégrité q. p. possédant un élément unité.

Théorème 1. — *Les trois énoncés suivants concernant un anneau sont équivalents :*

(*i*) *tout idéal est* q. p.;

(*ii*) *si* $\mathfrak{g}_1$ *et* $\mathfrak{g}_2$ *sont deux idéaux premiers, alors ou bien* $\mathfrak{g}_1$ *divise* $\mathfrak{g}_2$, *ou bien* $\mathfrak{g}_2$ *divise* $\mathfrak{g}_1$;

(*iii*) *étant donnés deux éléments, il existe une puissance de l'un deux qui est divisible par l'autre.*

---

[1] *Acta Sci. Math. Szeged*, **11**, 1947, p. 174-183. Un idéal est dit quasi primaire si $ab \in \mathfrak{q}$ et $a^n \overline{\in} \mathfrak{q}$ entraînent $b^m \in \mathfrak{q}$. Une définition équivalente est que son radical soit premier.

Démonstration. — Si tout idéal est q. p., alors l'intersection de deux idéaux l'est aussi; ainsi si $\mathfrak{g}_1$ et $\mathfrak{g}_2$ sont deux idéaux premiers, $\mathfrak{g}_1 \cap \mathfrak{g}_2$ l'est aussi, c'est-à-dire $\mathfrak{g}_1 \subset \mathfrak{g}_2$ ou $\mathfrak{g}_2 \subset \mathfrak{g}_1$, donc (*i*) implique (*ii*). Soient maintenant a et b deux éléments quelconques et désignons par $\mathfrak{g}_a$ resp. $\mathfrak{g}_b$ le radical de l'idéal principal (a) resp. $(\mathfrak{b})$. En vertu de (*ii*) $\mathfrak{g}_a \subset \mathfrak{g}_b$ ou $\mathfrak{g}_b \subset \mathfrak{g}_a$. Dans le premier cas $a \in \mathfrak{g}_a \subset \mathfrak{g}_b$ entraîne $a^n \in (b)$, dans le deuxième cas on a $b^m \in (a)$, donc (*ii*) entraîne (*iii*). Enfin (*iii*) entraîne (*i*), car si $ab \in \mathfrak{q}$ et $a^n \in (b)$, on a

$$a^{n+1} = a^n a \subset (a)(\mathfrak{b}) \in \mathfrak{q},$$

donc l'idéal $\mathfrak{q}$ est, en effet, q. p.

Il est facile de donner un exemple d'un anneau q. p. : tout anneau de valuation (Bewertungsring) ([2]) est q. p., car de deux éléments l'un est sûrement diviseur de l'autre. Ceci rend plausible que les domaines d'intégrité q. p. les plus généraux sont parmi les généralisations des anneaux de valuation. Nous allons démontrer que c'est effectivement le cas.

Soit Γ un module (groupe abélien additif), où un *ordre partiel* est défini parmi les éléments, satisfaisant aux conditions suivantes : *a*. si $\alpha \geqq \beta$, $\beta \geqq \alpha$, on a $\alpha = \beta$; *b*. si $\alpha \geqq \beta$, $\beta \geqq \gamma$, on a $\alpha \geqq \gamma$; *c*. si $\alpha \geqq \beta$, $\gamma \geqq \delta$, on a $\alpha + \gamma \geqq \beta + \delta$. Nous disons que Γ est *ordonné d'une manière semi-archimédienne*, si, étant donné $\alpha \geqq 0$, $\beta \geqq 0$, il existe un entier positif n, tel que $n\alpha \geqq \beta$ ou $n\beta \geqq \alpha$.

Nous disons que le corps $\mathfrak{K}$ est valué par le groupe de valeurs Γ, si à tout élément a de $\mathfrak{K}$ différent de zéro il correspond un élément α de Γ, $w(a) = \alpha$ avec les propriétés suivantes : 1° $w(ab) = w(a) + w(b)$; 2° si $w(a) \geqq w(c)$ et $w(b) \geqq w(c)$, on a $w(a+b) \geqq w(c)$; 3° à chaque élément α de Γ correspond un élément a de $\mathfrak{K}$, tel que $w(a) = \alpha$.

Les éléments de $\mathfrak{K}$ pour lesquels $w(a) \geqq 0$, ensemble avec l'élément zéro du corps, forment un anneau $\mathfrak{W}$, en vertu de 1° et 2°. Si Γ est ordonné d'une manière semi-archimédienne, $\mathfrak{W}$ est un domaine d'intégrité q. p. possédant un élément unité, car étant donnés a et $\mathfrak{b}$, considérons les valeurs $w(a) = \alpha \geqq 0$ et $w(b) = \beta \geqq 0$. Si par exemple $n\alpha \geqq \beta$, on a $w(a^n b^{-1}) = w(a^n) - w(b) = n\alpha - \beta \geqq 0$ et ainsi $a^n b^{-1}$ est un élément de $\mathfrak{W}$, c'est-à-dire b divise a^n.

Soit maintenant $\mathfrak{W}$ un domaine d'intégrité q. p. possédant un élément unité. Au corps quotient $\mathfrak{K}$ de $\mathfrak{W}$ nous faisons correspondre un groupe de valeurs Γ, ordonné d'une manière semi-archimédienne, de la façon suivante ([3]) : nous mettons dans une même classe α les éléments de $\mathfrak{K}$ associés par rapport à $\mathfrak{W}$ et nous définissons l'addition et l'ordre parmi ces classes. La somme $\alpha + \beta$ de deux classes sera la classe qui contient les produits de forme ab, où $a \in \alpha$ et $b \in \beta$. Puisque l'addition des classes correspond ainsi à la multiplication des éléments, on voit immédiatement que les classes définies par les éléments

---

([2]) W. Krull, *Journal für die r. u. angew. Mathematik*, **167**, 1936, p. 160-196.

([3]) La construction est la même que celle employée par Krull.

non nuls de $\mathfrak{K}$ constituent un groupe abélien Γ. Or, nous définissons la relation $\geq$ parmi les classes en posant $\alpha \geq \beta$ si $a/b \in \mathfrak{W}$, $a \in \alpha$, $b \in \beta$ et en particulier $\alpha = \beta$ seulement si a/b est une unité de $\mathfrak{W}$. (A la classe unité correspond évidemment l'élément o de Γ.) La transitivité de l'ordre est une conséquence de la divisibilité; $c.$ est banal. Γ est ordonné d'une manière semi-archimédienne, car si $\alpha \geq 0$ et si $\beta \geq 0$, c'est-à-dire si tout élément a de α et tout élément b de β appartient à $\mathfrak{W}$, il existe un n tel que b divise a^n ou a divise b^n, c'est-à-dire que $n\alpha \geq \beta$ ou $n\beta \geq \alpha$. Ainsi nous avons démontré le

THÉORÈME 2. — *Un domaine d'intégrité $\mathfrak{W}$ possédant un élément unité est q. p. si et seulement s'il existe un groupe Γ partiellement ordonné d'une manière semi-archimédienne tel que $\mathfrak{W}$ soit l'anneau de valuation de son corps quotient par rapport à Γ.*

THÉORIE DES GROUPES. — *Sur les sous-groupes fermés connexes de rang maximum des groupes de Lie clos.* Note (*) de MM. **Armand Borel** et **Jean de Siebenthal**, présentée par M. Élie Cartan.

1. Les sous-groupes abéliens maximums d'un groupe de Lie clos G sont tous connexes et ont la même dimension; ce sont des tores T^l dont la dimension définit le rang l de G. On peut se proposer d'étudier les sous-groupes fermés connexes G′ de G en se plaçant au point de vue du rang; dans le cas où le rang de G′ est au rang de G, on peut énoncer :

THÉORÈME 1. — *Soient G un groupe de Lie clos, G′ un sous-groupe fermé connexe de rang maximum de G, et Z′ le centre de G′; alors G′ est le normalisateur connexe de Z′.*

THÉORÈME 2. — *Soient G un groupe de Lie clos, et G′ un sous-groupe fermé connexe* maximum *de rang maximum dans G; alors G′ est le normalisateur d'un élément de G.*

Par normalisateur d'un sous-ensemble H de G, nous entendons l'ensemble des éléments x de G tels que $xHx^{-1} \subset H$. Remarquons que le théorème 2 peut être en défaut si G′ n'est pas maximum; par exemple, $A_1 \times A_1 \times A_1 \subset C_3$ n'est le normalisateur d'aucun élément de C_3. Ajoutons que *si n, n' et s sont les dimensions respectives de G, G′, et du centre Z de G, on a $n' \leq n - 2(l - s)$.*

2. La démonstration nécessite les notions suivantes [1], [2] : au groupe clos G sont associés un espace vectoriel réel R^l et un ensemble Σ de $2m$ formes linéaires $\pm\varphi_1(x), \ldots, \pm\varphi_m(x)$, $x \in R^l$: les paramètres angulaires de G; la somme $\sum_1^m \varphi_i^2$ définit dans R^l une métrique euclidienne. Les $(l-1)$ — plans

(*) Séance du 19 mai 1948.

(1) E. Cartan, *Annali di Mat.*, 4, 1927, p. 211-225.

(2) E. Stiefel, *Comment. Math. Helv.*, 14, 1942, p. 350-380.

$\vartheta' \equiv 0 \pmod 1$ constituent le diagramme de G, et le groupe engendré par les symétries par rapport à ces plans est un groupe spatial Γ dont chaque opération conserve le diagramme.

R′ peut être considéré comme le recouvrement universel du tore T′ : $\varphi R' = T'$; les plans $\vartheta_i \equiv 0$ [1] représentent alors les éléments (dits singuliers) de T′ dont le normalisateur dans G est plus grand que T′. Les opérations de Γ définissent des transformations de T′ sur lui-même; ce sont les automorphismes intérieurs de G qui laissent T′ invariant.

Si G est simple, le domaine fondamental de Γ dans R′ est un simplexe P(G) défini par le système $\varphi_1 \geqq 0, \ldots, \varphi_l \geqq 0, \omega \leqq 1$ où $\varphi_1, \ldots, \varphi_l$ sont l paramètres angulaires (fondamentaux); $\omega = \sum_{1, \ldots, l} m_i \varphi_i$ est le paramètre angulaire dominant (m_i entiers positifs). Si $\vartheta_i(x) = -\vec{\vartheta}_i . \vec{x}$, on peut représenter $\vec{\varphi}_1, \ldots, \vec{\varphi}_l, -\vec{\omega}$ par $l+1$ points $P_1, \ldots, P_l$, P reliés par 0, 1, 2 ou 3 traits suivant que l'angle des vecteurs correspondants est 90°, 120°, 135° ou 150°. La figure obtenue est la figure de Schläfli $\mathcal{F}(G)$.

3. On parvient maintenant aux propositions énoncées à l'aide des lemmes suivants, qui supposent $T' \subset G' \subset G$.

A. *Soit G′ un sous-groupe fermé connexe de G ayant même rang; les paramètres angulaires de G′ sont des paramètres angulaires de G.*

B. *Si $\pm \vartheta_1, \ldots, \pm \vartheta_{m'}$ sont les paramètres d'un sous-groupe, les points x de R′ tels que $\vartheta'_{m'+j}(x) \equiv 0$ ($j = 1, \ldots, m - m'$) recouvrent le centre de G.*

C. *Soit $\pm \vartheta_1, \ldots, \pm \vartheta_{m'}$ un sous-ensemble Σ′ de Σ; la condition nécessaire et suffisante pour que Σ′ soit l'ensemble des paramètres angulaires d'un sous-groupe G′ de G ayant même rang, est que tout paramètre angulaire de Σ qui est une combinaison linéaire à coefficients entiers de paramètres de Σ′ appartienne déjà à Σ′.*

Le lemme (A) est essentiel dans toutes les propositions; (B) est utilisé dans (C) et pour établir l'inégalité $n' \leqq n - 2(l - s)$, (C) est le lemme principal.

4° Le théorème 2 permet de déterminer d'une façon simple tous les sous-groupes maximums G′ de rang maximum d'un groupe simple G donné, sans distinguer entre deux sous-groupes conjugués.

Soient $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_l(x)$ les coordonnées de $x \in R'$, et $S_j(0, \ldots 0, 1/m_j, 0, \ldots, 0)$ ($j = 1, 2, \ldots, l$) les sommets de P(G) distincts de l'origine O. G′ est ou bien le normalisateur de ρS_j pour m_j premier plus grand que 1 ou bien le normalisateur d'un élément intérieur à l'arête $\rho(OS_i)$ pour $m_i = 1$. Les paramètres angulaires fondamentaux de G′ sont $\varphi_1, \ldots, \varphi_{j-1}, -\omega, \varphi_{j+1}, \ldots, \varphi_l$ dans le premier cas, et $\varphi_1, \ldots, \varphi_{i-1}, \varphi_{i+1}, \ldots, \varphi_l$ dans le second; ainsi, en supprimant dans $\mathcal{F}(G)$ le point P_j ou les deux points P, P_i (ainsi que les traits issus de ces points), on peut lire la structure de G′.

Résultats. — Les valeurs utiles de m_k sont 1, 2, 3 ou 5. Pour $m_k = 1$ ou 2,

on obtient les sous-groupes caractéristiques des automorphismes involutifs de G appartenant au groupe adjoint continu, l'espace homogène G/G' étant symétrique et irréductible [3].

Pour $m_k = 3$, on obtient $A_2 \times A_2 \times A_2 \subset E_6$, $A_2 \times A_5 \subset E_7$, A_3 et $A_2 \times E_6 \subset E_8$, $A_2 \times A_2 \subset F_4$, et $A_2 \subset G_2$. Pour $m = 5$, seulement $A_4 \times A_4 \subset E_8$ [4].

THÉORIE DES NOMBRES. — *Théorèmes sur des approximations asymétriques.* Note (*) de M. **Nicolae Negoescu**, présentée par M. Arnaud Denjoy.

Les notations étant celles de la Note précédente [1], nous pouvons énoncer les théorèmes suivants :

Théorème 1. — *Pour les irrationnels* α *proprement équivalents à* $\theta = [a_0, a_1, a_2, \ldots]$, *on a* $M(\alpha;\ \tau) =$ *maximum* $\left(\overline{\lim_{\nu=\infty}}\,\rho_{2\nu},\ \tau\,\overline{\lim_{\nu=\infty}}\,\rho_{2\nu-1}\right)$ *et pour les irrationnels* β *improprement équivalents à* θ, $M(\beta;\ \tau) =$ *maximum* $\left(\overline{\lim_{\nu=\infty}}\,\rho_{2\nu-1},\ \tau\,\overline{\lim_{\nu=\infty}}\,\rho_{2\nu}\right)$.

Théorème 2. — *a. Les irrationnels proprement équivalents à* $[\overline{k, m}]$ *ont* $M(\theta;\ \tau) = \sqrt{m^2 + 4\tau}$ *pour* $\tau = m/k$; *b. Les irrationnels improprement équivalents à* $[\overline{k, m}]$ *ont* $M(\theta;\ \tau) = \sqrt{m^2\tau^2 + 4\tau}$ *pour* $\tau = k/m$.

Théorème 3. — *a. Les irrationnels proprement équivalents à* $[\overline{k, 1, 1, 1}]$ *ont* $M(\theta;\ \tau) = \sqrt{\tau^2 + 10\tau + 9}/2$ *pour* $\tau = 3/(2k+1)$; *b. Les irrationnels improprement équivalents à* $[\overline{k, 1, 1, 1}]$ *ont* $M(\theta;\ \tau) = \sqrt{9\tau^2 + 10\tau + 1}/2$ *pour* $\tau = (2k+1)/3$.

Théorème 4. — *Les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un nombre irrationnel* θ *soit tel que pour tout* $\gamma < i$, *il existe seulement un nombre fini de fractions* p/q *satisfaisant*

$$(1a)\qquad -\frac{\gamma}{q^2} < \frac{p}{q} - \theta < 0, \qquad \text{resp } (1b)\quad 0 < \frac{p}{q} - \theta < \frac{\gamma}{q^2},$$

sont

$$(2a)\qquad \begin{cases} \lim\limits_{\nu=\infty} a_{2\nu} = \infty, \\ \lim\limits_{\nu=\infty} a_{2\nu+1} = 1, \end{cases} \qquad \text{resp } (2b)\quad \begin{cases} \lim\limits_{\nu=\infty} a_{2\nu} = 1, \\ \lim\limits_{\nu=\infty} a_{2\nu+1} = \infty. \end{cases}$$

Remarques. — Si $m = 1$, le théorème $2a$ donne les théorèmes 11, 12, 13 de M. B. Segre [2] et $2b$ constitue une précision du théorème V, démontré par

---

(3) E. Cartan, *Bull. Soc. Math.*, 55, 1927, p. 126-132.

(4) Les démonstrations détaillées seront publiées prochainement; d'autres mémoires sur les sous-groupes paraîtront ultérieurement.

(*) Séance du 19 mai 1948.

(1) *Comptes rendus*, **226**, 1948, p. 1945.

(2) *Duke Mathematical Journal*, **12**, 1945, p. 337.

nous (³). Le théorème 2, si $m = 2$, donne des précisions du théorème VI (³) et explique sa nature compliquée. Le théorème 2 montre que pour tout irrationnel θ, la fonction $M(\theta; \tau)$ est une fonction continue par rapport à τ, ayant la forme d'une échelle constituée par des droites parallèles à $o\tau$ et des droites par l'origine. Le théorème 3 montre que dans les régions, bornées par $M = \text{maximum}\left(\sqrt{1+4\tau}, \sqrt{\tau^2+4\tau}\right)$ et $M = M(\theta; \tau)$, θ étant équivalents à $[\overline{K, 1}]$ $(K = 1, 2, \ldots)$, il existe les points angulaires des fonctions $M = M(\theta; \tau)$, θ étant équivalents à $[\overline{K, 1, 1, 1}]$ $(K = 1, 2, \ldots)$. Les théorèmes 2 et 3 ne sont pas contradictoires avec le résultat de M. R. Robinson, énoncé par M. Koksma (⁴). Le théorème 4 contient le théorème 14 de M. B. Segre (²).

Enfin considérons l'ensemble de toutes les fonctions $M(\theta; \tau) < \text{maximum}(3, 3\tau)$, c'est-à-dire tel que $\text{maximum}\left(\overline{\lim_{\nu=\infty}}\, \rho_{2\nu}, \tau \overline{\lim_{\nu=\infty}}\, \rho_{2\nu+1}\right) < \text{maximum}(3, 3\tau)$. Pour cela il faut avoir $[a_{2\nu+1}, a_{2\nu+2}, \ldots] + [0, a_{2\nu}, a_{2\nu-1}, \ldots, a_1] < 3$ et

$$\tau\{[a_{2\nu+2}, a_{2\nu+3}, \ldots] + [0, a_{2\nu+1}, a_{2\nu}, \ldots, a_1]\} < 3\tau \ (\tau > 0) \quad \text{pour tous} \quad \nu > N$$

ou bien

$$[a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots] + [0, a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1] < 3 \quad \text{pour tous} \quad n > N_1.$$

Or conformément aux recherches de Markoff (⁵) et de M. Shibata (⁶), il est nécessaire et suffisant que les nombres θ soient équivalents à

$$[\bar{1}], [\bar{2}] \text{ ou } [\overline{2, 2, \underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{2r_0}, 2, 2, \underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{2r_1}, 2, \ldots, 1, 2, 2, \underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{2r_\nu}}]$$

$r_0, r_1, \ldots, r_\nu$ pouvant être même zéro.

Maintenant nous pouvons énoncer les théorèmes généralisés de O. Perron (⁷).

THÉORÈME 5. — *L'ensemble des fonctions* $M(\theta; \tau)$ *pour tous les nombres irrationnels tels que* $M(\theta; \tau) <$ *maximum* $(3, 3\tau)$ *est dénombrable, c'est-à-dire forme une suite de fonctions* (*continues par rapport à* τ). Cette suite converge uniformément à la fonction maximum $(3, 3\tau)$ et elle est donnée par

$$\text{max}\left(\frac{\sqrt{9Q^2-4}}{Q}, \quad \frac{\tau\sqrt{9Q^2-4}}{Q}\right). \tag{3}$$

Q parcourt la suite des nombres de Markoff, c'est-à-dire les nombres entiers positifs qui satisfont à $Q^2 + Q_1^2 + Q_2^2 = 3QQ_1Q_2$ où Q_1, Q_2 sont deux nombres entiers positifs.

(³) *Bulletin de l'École Polytechnique Jassy*, 3, fasc. 1, 1948, p. 3.
(⁴) *Mathematical Reviews*, 8, 1947, p. 566.
(⁵) *Mathematische Annalen*, 17, 1880, p. 379.
(⁶) *The Tôhoku Mathemdtical Journal*, 23, 1924, p. 328.
(⁷) *Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie*, 1921.

La fonction $M(\theta ; \tau)$ est égale à l'expression (3) seulement pour les nombres équivalents à

$$\frac{\sqrt{9Q^2-4}+Q+2P}{2Q} \qquad \text{où} \quad P \equiv \frac{Q_1}{Q_2} (\operatorname{mod} Q).$$

THÉORÈME 6. — *Les nombres* θ *équivalents à*

$$2,\ 2,\ \underbrace{1,\ 1,\ \ldots,\ 1}_{\lambda_1},\ 2,\ 2,\ \underbrace{1,\ 1,\ \ldots,\ 1}_{\lambda_2},\ 2,\ 2,\ 1,\ \ldots$$

avec $\lambda_1 < \lambda_2 \ldots$ *et la borne supérieure de* $\lambda_n = \infty$, *ont la puissance de continu et* $M(\theta ; \tau) = \max (3, 3\tau)$.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur les singularités des fonctions analytiques définies par des développements dirichlétiens.* Note (*) de M. MAURICE BLAMBERT, présentée par M. Jacques Hadamard.

Les définitions et notations utilisées ici sont extraites de l'ouvrage de M. Mandelbrojt (1). La notion d'uniformité introduite par M. Mandelbrojt est appelée *Uniformité* $\mathfrak{U}_{\mathfrak{M}}$: il en résulte l'*Ordre généralisé* $\mathcal{O}_{\mathfrak{M}}$, ou *Ordre* $\mathcal{O}_{\mathfrak{M}}$. Soit Δ une région située dans le demi-plan $\sigma > \sigma_1$ et ayant les caractères suivants :

a. elle contient les points s tels que $\Re s = \sigma > \sigma^{f}_{\Delta}$;

b. il existe une fonction $f(s)$ holomorphe dans Δ, égale à la somme de la série $\Sigma a_n e^{-\lambda_n s}$ pour $s \in \Delta$, $\Re s = \sigma > \sigma_1$ [abscisse de convergence absolue de $f(s)$].

Dire que $f(s)$ est *uniforme* $\mathfrak{U}_{\mathfrak{M}}$ dans le demi-plan $\sigma > \sigma_1$ signifie que :

a. il existe un domaine $\Delta(\sigma_1)$ qui contient chaque domaine Δ ayant les propriétés ci-dessus ;

b. $f(s)$ est holomorphe dans $\Delta(\sigma_1)$;

c. $f(s)$ est donnée pour $s \in \Delta(\sigma_1)$, $\Re s = \sigma > \sigma_c$ (abscisse de convergence simple), par la somme de $\Sigma a_n e^{-\lambda_n s}$;

d. S^{σ} étant l'ensemble des points du demi-plan $\sigma \geqq \sigma_1$ qui ne sont pas points de $\Delta(\sigma_1)$, $f(s)$ ne peut être prolongée analytiquement jusqu'à un point de S^{σ} sans qu'on puisse effectuer ce prolongement le long d'un chemin coupant la droite $\sigma = \sigma_1$.

Définition de « l'ordre $\mathcal{O}_{\mathfrak{M}}$ ». — A chaque $\eta > 0$ et à chaque $\varepsilon > 0$, il correspond une constante $N(\varepsilon, \eta, \sigma_1)$ telle que $|f(s)| < N(\varepsilon, \eta, \sigma_1)\, t^{\eta}$, $s \in \Delta(\sigma_1, \varepsilon)$ et $|t|$ suffisamment grand, où l'on pose : $\Delta(\sigma_1, \varepsilon) = \left[\overline{P(\sigma_1) - S^{\sigma}(\varepsilon)}\right]$ avec les définitions suivantes :

(*) Séance du 19 mai 1948.

(1) *Dirichlet Series. The Rice Institute Pamphlet*, Houston, 1944, p. 231.

a. $S_f^{\sigma_1}(\varepsilon) = \bigcup c(s, \varepsilon)$, $s \in S_f^{\sigma_1}$, $c(s, \varepsilon)$ cercle ouvert de centre s et de rayon ε, $P(\sigma_1)$ représentant le demi-plan $\sigma > \sigma_1$;

b. $\left[\overline{P(\sigma_1) - S_f^{\sigma_1}(\varepsilon)}\right]$ est la fermeture de la partie de la différence des ensembles $P(\sigma_1)$ et $S_f^{\sigma_1}(\varepsilon)$ qui constitue une région contenant un demi-plan $\sigma > \sigma_1$ où $\Sigma a_n e^{-\lambda_n s}$ converge et où $f(s)$ est holomorphe.

Nulle quantité inférieure à ν n'a cette propriété. Par définition, $f(s)$ est dite *d'ordre* $\mathcal{O}_{\mathfrak{M}}$ égale à ν dans $\sigma > \sigma_1$.

La fonction définie par la série $\Sigma a_{\mu_n}^{(k)} b_n e^{-\mu_n s}$, k entier positif, est dite déduite par application aux fonctions $f(s)$ et $\varphi(s)$ de l'opérateur Hadamard-Mandelbrojt $H_{\mathfrak{M}}(f, \varphi \mid k)$ où

$$a_{\mu_n}^{k} = \begin{cases} \displaystyle\sum_{\lambda_m < \mu_n} (\mu_n - \lambda_m)^k a_m & \text{si} \quad n \geq n_0, \\ 0 & \text{si} \quad 1 \leq n < n_0, \end{cases}$$

où n_0 est le plus petit entier tel que $\mu_n > \lambda_1$.

Les fonctions auxquelles on applique cet opérateur $H_{\mathfrak{M}}(f, \varphi \mid k)$ sont soumises aux conditions suivantes :

A. $f(s) = \Sigma \alpha_n e^{-\lambda_n s}$, la suite $\{\lambda_n\}$ croissant strictement vers l'infini, est *uniforme* $\mathcal{U}_{\mathfrak{M}}$ dans le demi-plan $\sigma > \sigma_1$ et y possède *l'ordre* $\mathcal{O}_{\mathfrak{M}}$ égal à ν, une abscisse de convergence simple σ_C^f et absolue σ_A^f. Dans le demi-plan $\sigma_1 < \vartheta_1^f \leq \sigma$ les singularités de $f(s)$ sont *réduites* à des pôles $\omega_j (\neq 0)$.

Par hypothèse, on peut trouver $\eta > 0$ tel que $\overline{\text{borne}}\ \sigma < \vartheta_1^f - \eta$, lorsque $s \in S_f^{\sigma_1}$, $\sigma < \vartheta_1^f$.

B. $\varphi(s) = \Sigma b_n e_n^{-\mu s}$, la suite $\{\mu_n\}$ croissant strictement vers l'infini, est *uniforme* $\mathcal{U}_{\mathfrak{M}}$ dans $\sigma > \sigma_2$, possède *l'ordre* $\mathcal{O}_{\mathfrak{M}}$ égal à μ, σ_C^φ et σ_A^φ. Ses singularités dans le demi-plan $\sigma_2 < \vartheta_1^\varphi \leq \sigma$ sont réduites à des pôles β_p. Par hypothèse, on peut trouver $\eta_1 > 0$ tel que $\overline{\text{borne}}\ \sigma < \vartheta_1^\varphi - \eta$, lorsque $s \in S_\varphi^{\sigma_2}$, $\sigma < \vartheta_1$. [$S_\varphi^{\sigma_2}$ pour la fonction $\varphi(s)$, a une définition analogue à celle de $S_f^{\sigma_1}$ pour $f(s)$].

Hypothèse H. — Quels que soient les entiers j, j', p, p', à l'exclusion du seul cas où simultanément $j = j'$, $p = p'$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$|\omega_j - \omega_{j'} + \beta_p - \beta_{p'}| > \delta > 0.$$

Hypothèse H'. — Il existe $k_0 > 0$ tel que

$$\varlimsup_{\varepsilon = 0} \int_{\bar{\pi}(\vartheta_1^f - \eta_1) \cap \overset{\star}{C}{}_1^f(\varepsilon)} \frac{d\zeta}{|s|^{1+k_0+\delta}} < \infty;$$

$\delta > 0$ arbitrairement petit, ζ représentant l'arc, $\bar{\pi}(\vartheta_1^f - \eta_1)$ le demi-plan $\sigma \leq \vartheta_1^f - \eta$ et où $\overset{\star}{C}{}_1^f(\varepsilon)$ est déterminé de la manière suivante :

Soit $c > \max(0, \sigma_A^f)$. On pave la bande $\sigma_1 \leq \sigma \leq c$ avec des carrés de côté $\varepsilon = (c - \sigma_1)/q$ (q entier). Soit $D_1(\varepsilon)$ l'ensemble de tous les carrés qui ne contiennent dans leur fermeture ni un point de $S_f^{\sigma_1}$ ni le point $s = 0$ et qui ne

sont pas contigus à de tels carrés. ε est choisi suffisamment petit pour que les carrés bordant $\sigma = c$ appartiennent à $D_1(\varepsilon)$.

Soit $\overset{\star}{D}{}_1^f(\varepsilon)$ la plus grande région appartenant à $D_1(\varepsilon)$ et contenant les carrés bordant $\sigma = c$. $\overset{\star}{C}{}_1^f(\varepsilon)$ est la partie de la frontière de $\overset{\star}{D}{}_1^f(\varepsilon)$ qui ne contient pas les points de $\sigma = c$.

THÉORÈME. — *Dans les hypothèses ci-dessus relatives à $f(s)$ et $\varphi(s)$, jointes au choix $k > \max(k_0 + \Delta, \Delta + \mu)$, si $s = 0$ n'est point régulier ni pour $f(s)$, ni pour $f(s)\,s^\Delta$, où $\Delta > \nu + 1$, alors tout point $\omega_J + \beta_P$ ($\mathfrak{S}^f \leqq \mathcal{R}\,\omega_J$, $\mathfrak{S}^\varphi \leqq \mathcal{R}\,\beta_P$, $\mathfrak{S}^f$ et $\mathfrak{S}^\varphi$ étant deux nombres assujettis aux conditions $\mathfrak{S}_1^f \leqq \mathfrak{S}^f$, $\mathfrak{S}_1^\varphi \leqq \mathfrak{S}^\varphi$, $\sigma_{\mathcal{H}}^f + \mathfrak{S}_1^\varphi \leqq \mathfrak{S}^f + \mathfrak{S}^\varphi$), singulier possible de $\sum \alpha_{\mu_n}^k b_n e^{-\mu_n s} = H_{\mathfrak{M}}(f(s), \varphi(s)\, k)$, vérifiant*

$$\mathcal{R}(\omega_J + \beta_P) > \max \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{\mathcal{H}}^f + \sigma^\varphi \\ \sigma_{\mathcal{C}}^\varphi + \tau_{\mathcal{C}}^\varphi + \mathfrak{S}_1^f \end{array} \right. \qquad [\sigma_{\mathcal{H}}^f = \text{abscisse d'holomorphie de } f(s)],$$

où $\tau_{\mathcal{C}}^\varphi = \overline{\lim}_{x=\infty} \left[L\, \varpi(x) - \varpi([x]) \right] / x$ et où $\varpi(x)$ est la « fonction de distribution » de la suite $\{\mu_n\}$ (définie par $\mu_{\varpi(x)} < x \leqq \mu_{\varpi(x)+1}$), est pôle d'ordre $k_J + m_P - 1$ de la fonction définie par cette série. (k_J, ordre du pôle ω_J; m_P, ordre du pôle β_P.)

Il est manifeste que ce théorème étend aux séries de Dirichlet générales, un résultat bien connu, obtenu par M. Borel sur les séries de Taylor.

La démonstration utilise un théorème fondamental de M. Mandelbrojt ([2]).

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur l'approximation polynomiale des fonctions sur tout l'axe réel.* Note ([*]) de M. **SZOLEM MANDELBROJT**, présentée par M. Arnaud Denjoy.

Le théorème suivant de S. Bernstein est bien connu.

Soit

$$(1) \qquad F(x) = \Pi\left(1 + \frac{x^2}{\beta_n^2}\right) \qquad (-\infty < x < \infty)$$

avec

$$(2) \qquad \sum \frac{1}{\beta_n} = \infty,$$

et soit $f(x)$ une fonction continue ($-\infty < x < \infty$) avec $f(x)/F(x) \to 0$ ($|x| \to \infty$).

Quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un polynome $P(x)$ tel que

$$(3) \qquad |f(x) - P(x)| < \varepsilon F(x) \qquad (-\infty < x < \infty).$$

([2]) *Dirichlet Series*, Chap. IX, p. 243.

([*]) Séance du 19 mai 1947.

Nous démontrons un théorème beaucoup plus général, mais voici d'abord quelques définitions. $\{\nu_n\}$ étant une suite croissante de quantités positives, posons $N(\nu)=\sum_{\nu_n<\nu} 1$, $D(\nu)=N(\nu)/\nu\,(\nu>0)$, $D^{\cdot}=\overline{\lim}_{\nu=\infty} D(\nu)$, $D^{\cdot}(\nu)=\overline{\text{borne}}_{x\geq\nu}\, D(x)$. La quantité $D^{\cdot}$ est appelée la densité supérieure de la suite $\{\nu_n\}$, la fonction $D^{\cdot}(\nu)$ est la fonction de densité supérieure de cette suite.

THÉORÈME I. — *Soit $\{\lambda_n\}$ une suite d'entiers positifs croissants, et désignons par $\{\nu_n\}$ la suite d'entiers positifs complémentaires de la suite $\{\lambda_n\}$ par rapport à la suite de tous les entiers positifs. Désignons par $D^{\cdot}$ et $D^{\cdot}(\nu)$ la densité supérieure et la fonction de densité supérieure de la suite $\{\nu_n\}$. Supposons que $D^{\cdot}<1/2$.*

Soit $F(x)$ une fonction positive continue pour $x\geq 0$, $\log F(x)$ étant une fonction convexe de $\log x\,(x>0)$. Supposons que $F(x)$ est λ_1 fois dérivable avec

$$(4)\qquad |F^{(\lambda_1)}(x)|=o\big(F(x)\big)^{1+\frac{1}{\lambda_1}}\quad (^1).$$

En posant $\log F(e^{\sigma})=p(\sigma)$, supposons qu'il existe une constante positive β telle que

$$(5)\qquad \int^{\infty} p(\sigma)\, e^{-\int^{\sigma}\frac{du}{1-2D^{\cdot}(\beta p(u))}}\, d\sigma=\infty.$$

Soit $f(x)$ une fonction continue $(-\infty<x<\infty)$ telle que

$$\lim_{|x|=\infty}\frac{f(x)}{F(|x|)}=0.$$

Dans ces conditions, quel que soit $\varepsilon>0$, il existe un polynome de la forme

$$(6)\qquad P(x)=a_0+a_1x^{\lambda_1}+\ldots+a_nx^{\lambda_n},$$

tel que

$$|f(x)-P(x)|<\varepsilon F(|x|)\,(-\infty<x<\infty).$$

Si $\lambda_n=n\,(n\geq 1)$ on a $D^{\cdot}(\nu)\equiv 0$, $D^{\cdot}=0$, et la relation (5) devient

$$\int^{\infty} p(\sigma)\, e^{-\sigma}\, d\sigma=\infty,$$

ce qui est équivalent, comme on le sait, à (2), lorsque $F(x)$ est donnée par (1). D'ailleurs, pour une telle fonction (lorsque $\Sigma\beta_n^{-2}<\infty$, seul cas intéressant) $F'(x)=O\big(F(x)\big)^2$. Le théorème de S. Bernstein est donc bien un cas particulier du théorème 1.

Le théorème 1 résulte du théorème qui suit :

THÉORÈME II. — *Soit $F(x)$ une fonction positive, paire, continue, $\log F(x)$ étant une fonction convexe de $\log x\,(x>0)$. Les suites $\{\lambda_n\}$, $\{\nu_n\}$ étant définies*

---

(1) Il suffit de supposer que $F(x)$ est dérivable λ_1-1 fois, la dérivée $\lambda^{\text{ième}}$ existant presque partout [et satisfaisant (4)].

comme dans le théorème I, et D^*, $D^*(\nu)$ *ayant la même signification que dans ce théorème, supposons que* $D^* < 1/2$ *et que* (5), *avec* $p(\sigma) = \log F(e^\sigma)$, *ait lieu.*

Dans ces conditions, toute fonction $f(x)$ *appartenant à une classe* L_p *sur* $(-\infty, \infty)$ *avec* $1 \leqq p \leqq \infty$ (²), *et telle que*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)\, x^{\lambda_n}}{F(x)}\, dx = 0 \quad (n \geqq 0,\ \lambda_0 = 0)$$

est nulle presque partout.

La démonstration du théorème II est basée sur notre théorème sur la quasi-analyticité générale, où, moyennant une condition de la forme (5) portant sur $p(\sigma) = \overline{\text{borne}}_{n \geq 1}(n\sigma - \log M_n)$, on conclut, du fait que, sur $x \geqq 0$, $|\varphi^{(n)}(x)| \leqq M_n$, $\varphi^{(\lambda_n)}(0) = 0$, $\varphi(0) = 0$ à $\varphi(x) \equiv 0$ (³). Ici l'on pose :

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} \frac{f(x)\, dx}{F(x)}.$$

Les quantités correspondantes M_n sont fournies de la manière suivante : On désigne par $n(\sigma)$ la partie entière, non négative, de $d \log F(e^\sigma)/d\sigma$, on désigne par μ_n les valeurs de σ où $n(\sigma)$ est discontinue, et l'on pose $\log(M_n/M_{n-1}) = \mu_n$. Pour le passage du théorème II au théorème I, on remarque d'abord que si f est continue $(x \geqq 0)$ et si $\varphi(u) = f(x)/F(x) \to 0$ $(x \to \infty)$, $\varphi(u)$ est une fonction continue de $u = (F(x))^{-1}$ sur $[0, [F(0)]^{-1}]$, donc [si $F(x)$ croît pour $x \geqq 0$] $\varphi(u)$ peut être approchée par un polynome ordinaire

$$\left(\Sigma d_\nu u^\nu = \Sigma d_\nu (F(x))^{-\nu}\right).$$

et, si les conditions du théorème I sont remplies, à chaque fonction $(F(x))^{-1}$ correspond un polynome de la forme (6) tel que $|(F(x))^{-1} - P(x)| < \varepsilon F(x)$, en vertu du théorème II.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur un théorème récent de M. Denjoy.* Note de M. **Gustave Choquet**, présentée par M. Arnaud Denjoy.

Dans une Note récente (¹), M. Arnaud Denjoy a donné une large extension aux théorèmes topologiques qu'il avait posés, dans ses *Leçons sur le calcul des*

(²) L_∞ désigne la classe des fonctions bornées sur $(-\infty, \infty)$. Pour $1 \leqq p < \infty$, L_p est la classe des fonctions f telles que $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p\, dx < \infty$.

(³) Voir *Ann. École Norm. sup.*, 63, 1946, théorème (Q — A), forme A, p. 369. Remarquons qu'avec les notations du Mémoire cité, $D^*(\beta p) = o(p)$ $(p \to \infty)$, dans la formule (Q) $D^*(C_n u)$ peut donc être remplacé par $D^*(\beta C_n u)$.

(¹) *Comptes rendus*, 226, 1948, p. 1407.

coefficients d'une série trigonométrique (2e partie), comme base topologique de la théorie des fonctions de variable réelle. Cette extension recouvre un théorème topologique que j'avais énoncé dans ma thèse ([2]).

J'ai été amené également, comme conclusion à un travail sur la notion de semi-continuité ([3]), à étendre ce théorème topologique. Il se trouve que j'ai fait cette extension dans une direction très voisine de celle de M. Denjoy.

J'ai été conduit à l'énoncé ci-dessous, d'une part en cherchant une démonstration purement topologique du théorème de ma thèse, d'autre part en étudiant des problèmes auxquels ce théorème ne s'appliquait pas directement : Pour définir par exemple les paratingents de rang 2 de M. Bouligand, on associe un élément géométrique (une direction de droite) à tout triplet de points alignés d'un ensemble E; le fait que cet élément soit défini seulement sur un sous-ensemble de l'ensemble des triplets de E montrait la nécessité d'une extension du théorème en question.

Notations. — Soient $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ deux espaces métriques, $(\mathcal{X}\times\mathcal{Y})$ leur produit topologique, et A l'ensemble représentatif, dans $(\mathcal{X}\times\mathcal{Y})$ d'une application continue f de $\mathcal{X}$ dans $\mathcal{Y}$.

Soit d'autre part, $B\subset[(\mathcal{X}\times\mathcal{Y})-A]$.

Pour tout $b\in B$, soit $\delta(b)$ un sous-ensemble fermé, éventuellement vide, d'un espace métrique séparable Δ.

Pour tout $a\in A$, désignons par $[a]$ l'ensemble des points de $(\mathcal{X}\times\mathcal{Y})$ qui ont même première coordonnée que a.

Pour tout voisinage $\mathcal{V}$ de a $(a\in A)$ dans $(\mathcal{X}\times\mathcal{Y})$, posons

$$\mathcal{C}_{\mathcal{V}}(a)=\overline{\left[\bigcup_{b\in B\cap\mathcal{V}\cap[a]}\delta(b)\right]};\qquad \mathcal{P}_{\mathcal{V}}(a)=\overline{\left[\bigcup_{b\in B\cap\mathcal{V}}\delta(b)\right]}$$

et

$$\mathcal{C}(a)=\bigcap_{\mathcal{V}}\mathcal{C}_{\mathcal{V}}(a);\qquad \mathcal{P}(a)=\bigcap_{\mathcal{V}}\mathcal{P}_{\mathcal{V}}(a).$$

On a évidemment $\mathcal{C}(a)\subset\mathcal{P}(a)$, et $\mathcal{P}(a)$ possède la semi-continuité supérieure en fonction de a.

Nous dirons que $\mathcal{C}(a)$ et $\mathcal{P}(a)$ sont, respectivement, les contingent et paratingent relatifs à $(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, A, B, \delta)$ au point a.

Théorème. — *Avec les notations précédentes, s'il existe une base dénombrable $(\mathcal{V}_i)_{i=1,2,\ldots}$ de voisinage de A dans $(\mathcal{X}\times\mathcal{Y})$ telle que, pour tout i, $\mathcal{C}_{\mathcal{V}_i}(a)$ possède la semi-continuité inférieure ([4]) en fonction de a $(a\in A)$, l'ensemble des*

([2]) *Journal de Math. pures et appl.*, 1947.

([3]) A paraître prochainement aux *Annales de Grenoble*, 1947; les notations utilisées dans ce Mémoire diffèrent de celles utilisées ici.

([4]) L'énoncé resterait vrai en remplaçant le mot *inférieure* par *supérieure*, mais en fait, ce n'est que la semi-continuité inférieure que l'on rencontre en général dans l'étude de $\mathcal{C}_{\mathcal{V}}(a)$.

points de A *en lesquels on a* $\mathcal{C}(a) \not\equiv \mathfrak{L}(a)$ *est un ensemble gerbé sur* A (*c'est-à-dire une réunion dénombrable d'ensembles non denses sur* A).

Deux cas généraux d'applicabilité de ce théorème. — 1° L'ensemble $\delta(b)$ varie continûment avec $b (b \in B)$ et il existe un sous-ensemble $B' \subset B$ tel que B' soit partout dense sur B et que les sections $(B' \cap [a])$ possèdent la semi-continuité inférieure en fonction de a $(a \in A)$.

2° Pour tout $y \in \mathcal{Y}$, l'ensemble $(B \cap [y]_2)$ [5] est ouvert sur $[y]_2$ et la restriction de $\delta(b)$ à $(B \cap [y]_2)$ possède la semi-continuité inférieure en fonction de b.

Le lien entre l'énoncé de M. Denjoy et le théorème ci-dessus résulte de la traduction suivante des notations (*voir* la Note de M. Denjoy). On pose

$$\mathcal{X} = P; \quad \mathcal{Y} = U; \quad A = \text{ensemble des points } (X, X), \quad \text{où} \quad X \in P.$$
$$B = \text{ensemble des points } (X, M), \quad \text{où} \quad X \in P \quad \text{et} \quad M \in e(X).$$
$$\delta(b) = F(M), \quad \text{pour} \quad b = (X, M) \quad \text{où} \quad M \in e(X).$$

Les hypothèses de M. Denjoy s'expriment alors, avec nos notations, de la façon suivante :

α. L'ensemble $B \cap [a]$ (où $a \in A$) possède la semi-continuité inférieure en fonction de a;

β. Pour tout $a_0 \in A$ et tout $b_0 \in B \cap [a_0]$, il existe une application $b = g(a)$ de A dans B telle que :

β_1. $g(a) \in B \cap [a]$ pour tout $a \in A$, et $g(a_0) = b_0$;

β_2. $g(a)$ et $\delta[g(a)]$ sont continus au point a_0.

Sous ces conditions, distinctes de celles étudiées dans les deux cas généraux (1) et (2) ci-dessus, on vérifie aisément que les hypothèses de notre théorème sont vérifiées. Plus précisément, pour tout voisinage ouvert $\mathcal{V}$ de A, $\mathcal{C}_{\mathcal{V}}(a)$ possède la semi-continuité inférieure en fonction de a.

Remarque 1. — Notre énoncé s'applique immédiatement à l'étude des suites de fonctions : soit par exemple $f_n(x)$ un sous-ensemble fermé de l'espace Δ, défini pour tout entier $n > 0$, et pour tout $x \in E$ (E étant un espace métrique). On pose

$$\mathcal{C}(x) = \text{ens.} \limsup_{n \to \infty} f_n(x), \qquad \mathfrak{L}(x) = \text{ens.} \limsup_{x' \to x,\, n \to \infty} f_n(x').$$

Alors, si $f_n(x)$ possède, pour tout n, la semi-continuité inférieure en fonction de x, on a $\mathcal{C}(x) = \mathfrak{L}(x)$, sauf aux points d'un sous-ensemble gerbé de E.

Remarque 2. — Nous avons spécifié que l'espace Δ doit être séparable. On peut montrer en effet que l'énoncé de notre théorème serait en défaut *pour tout espace métrique* Δ *non séparable* [6].

---

[5] $[y]_2$ désigne l'ensemble des points $(\mathcal{X} \times \mathcal{Y})$ qui ont pour seconde coordonnée y.

[6] On peut utiliser pour cela le fait que, pour qu'un espace métrique Δ soit séparable, il faut et il suffit que tout sous-ensemble non dénombrable de Δ admette un point d'accumulation.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur deux théorèmes de Fabry.*
Note de M. **Shmuel Agmon**, présentée par M. Arnaud Denjoy.

Soit $f(z)=\Sigma d_n z^n$ une série de Taylor de rayon de convergence égal à un. On peut toujours poser $d_n=\theta_n l_n$, où $|\theta_n|\leqq 1$, $\overline{\lim}_{n=\infty}|\theta_n|=\theta>0$, et où $\{l_n\}$ est une suite appartenant à la classe $L=L\{n\}$, [c'est-à-dire la suite $\{l_n\}$ satisfait aux relations $l_n>0$, $\lim l_{n-1}/l_n=1$, et à quelques conditions de régularité, précisées dans notre Note précédente [1]]. Cette décomposition de d_n en un produit n'est pas unique. Une suite partielle de coefficients, $\{d_{n_k}\}(k=1,2,\ldots)$, sera appelée suite principale, s'il existe une telle décomposition pour laquelle $|\theta_{n_k}|\geqq\delta>0$.

Théorème 1. — *Soit $f(z)=\Sigma d_n z^n$ une série de Taylor de rayon de convergence égal à un. Soit $\{n_k\}$ une suite croissante d'entiers positifs, telle que $\lim(n_{k+1}-n_k)=\infty$, d_{n_k} étant une suite de coefficients principaux. Supposons que l'une des deux conditions suivantes soit remplie*

$$(1)\quad \overline{\lim_{k=\infty}}\left|\frac{d_{n_k+m}}{d_{n_k}}\right|\leqq e^{-\varphi(m)}\quad (m=1,2,\ldots),\qquad \overline{\lim_{k=\infty}}\left|\frac{d_{n_k-m}}{d_{n_k}}\right|\leqq e^{-\varphi(m)}\quad (m=1,2,\ldots),$$

où $\varphi(m)$ est une fonction croissante telle que

$$(2)\qquad \sum_1^\infty\frac{\varphi(m)}{m^2}=\infty.$$

Alors le cercle de convergence est une coupure.

Démonstration. — Supposons qu'il existe un point régulier de $f(z)$ sur le cercle de convergence. Sans diminuer la généralité, on peut supposer que le point d'affixe -1 est régulier. On peut alors associer à $f(z)$ une fonction entière $H(u)$ d'ordre un et du type moyen, telle que

$$\overline{\lim_{\rho=\infty}}\frac{\log|H(\rho e^{i\psi})|}{\rho}\leqq\Omega|\sin\psi|\qquad\text{pour}\quad|\psi|\leqq\alpha,\ 0<\alpha<\frac{\pi}{2},\ 0\leqq\Omega<\pi$$

et telle que : $H(n)=d_n\ (n=0,1,2,\ldots)$. Posons : $H_k(u)=H(n_k+u)/d_{n_k}$. D'après un théorème énoncé dans notre Note précédente [1], la famille $\{H_k(u)\}$ est normale dans toute partie bornée du plan. Chaque fonction $G(u)$ qui est la limite d'une suite partielle de fonctions de cette famille, est une fonction entière, non identiquement nulle $[G(0)=1]$ qui est telle que $|G(v+iw)|=O(e^{\Omega|w|})$. Supposons, par exemple, que la première condition (1) soit satisfaite. On a : $|G(m)|\leqq e^{-\varphi(m)}\ (m=1,2,\ldots)$, $\varphi(m)$ étant la fonction croissante satisfaisant la condition (2). D'après un théorème de

(1) *Comptes rendus*, **226**, 1948, p. 1497.

M[lle] M. L. Cartwright [2] $G(u) \equiv 0$, ce qui nous fournit la contradiction cherchée.

Le théorème suivant est un corollaire du théorème précédent.

THÉORÈME 2. — *Soit* $f(z) = \Sigma d_n z^n$ *une série de Taylor de rayon de convergence égal à un. Supposons qu'il existe une suite croissante d'entiers positifs, telle que* $\lim(n_{k+1} - n_k) = \infty$, *et telle que* $|d_{n_k}| > 0$, $|d_n| \leq C \operatorname{Min}(|d_{n_k}|, |d_{n_{k+1}}|)$ *pour* $n_k < n < n_{k+1}$, C *étant une constante. Supposons aussi qu'il existe une fonction* $\varepsilon(k) = \pm 1$, *telle que* : $\overline{\lim}\, |d_{n_k+\varepsilon(k)m}| / |d_{n_k}| \leq e^{-\varphi(m)}$ $\varphi(m)$ *étant une fonction croissante remplissant la condition* (2). *Alors le cercle de convergence est une coupure.*

Les deux théorèmes précédents contiennent le théorème de Fabry sur les séries lacunaires (dans sa forme faible). En effet, dans le cas du théorème de Fabry on peut poser $\varphi(m) \equiv \infty$. On voit d'ailleurs que le théorème reste encore vrai lorsqu'il n'existe qu'une suite infinie de lacunes, dont la longueur tend vers l'infini, à condition toutefois que ces lacunes soient bordées d'un côté par des coefficients principaux. Mais il est évident, d'après nos énoncés généraux (théorèmes I et II), qu'il n'est nullement nécessaire, pour tirer notre conclusion qu'il y ait des lacunes. Remarquons que dans le cas où $\overline{\lim}\, |d_n| = \infty$, les théorèmes précédents peuvent être généralisés : les hypothèses étant les mêmes, on a la conclusion suivante : $f(z)$ n'est bornée dans aucun secteur du cercle de convergence.

Soit $f(z) = \Sigma d_n z^n$, une série telle que $\lim(d_{n+1}/d_n) = 1$; on sait, d'après un autre théorème de Fabry, que $z = 1$ est un point singulier de $f(z)$. Voici une brève démonstration de ce théorème, qui utilise le théorème II de notre Note précédente.

Supposons, au contraire, qu'il existe un cercle C_ρ, $|z - 1| \leq \rho > 0$ dans lequel $f(z)$ est holomorphe. Soit alors $\{d_{n_k}\}$ une suite quelconque de coefficients principaux, et posons : $f_k(z) = \big(f(z) - S_{n_k-1}(z)\big)/d_{n_k} z^{n_k}$. $\big(S_m(z)$ est la somme partielle de $f(z)\big)$. D'après le théorème déjà cité, $\{f_k(z)\}$ est une famille normale dans C_ρ. On voit aisément que $f_k(z) \to 1/(1-z)$. Mais le point $z = 1$ est singulier pour $1/(1-z)$, ce qui conduit à une contradiction, et démontre le théorème.

Cette méthode montre que c'est seulement le voisinage des coefficients principaux qui compte. En effet, lorsque la suite $\{|d_n|\}$ appartient à la classe L, tous les coefficients sont principaux. Dans ce cas le théorème reste vrai, si l'on suppose $d_{n+1}/d_n \to 1$ pour $p_\nu \leq n \leq q_\nu$, $\{p_\nu\}$ $\{q_\nu\}$ étant deux suites, telle que $p_\nu \uparrow \infty$ $q_\nu \uparrow \infty$ et $\lim(q_\nu - p_\nu) = \infty$.

---

(2) *Proc. of the London Math. Society*, 41, 1936, p. 33.

TOPOLOGIE. — *Sur les corps de Boole topologiques.*
Note de M. **Roman Sikorski**, présentée par M. Paul Montel.

Soit C un corps de Boole additif au sens dénombrable. C s'appelle *corps topologique* lorsqu'on a fait correspondre à tout élément A de C un élément $\overline{A}$ de C de façon que les axiomes suivants de M. Kuratowski soient vérifiés :

(I) $\overline{A_1 + A_2} = \overline{A}_1 + \overline{A}_2$,

(II) $A \subset \overline{A}$,

(III) $\overline{O} = O$,

(IV) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

La plupart des définitions topologiques se laissent étendre aux corps topologiques; ainsi par exemple A est dit fermé lorsque $A = \overline{A}$; A est dit ouvert lorsque son complémentaire est fermé. Les théorèmes exprimés en termes de l'Algèbre de Boole et valables dans les espaces topologiques vérifiant les axiomes (I-IV) se laissent aussi, en général, étendre aux corps topologiques.

C étant un corps topologique, désignons par B(C) le plus petit corps additif (au sens dénombrable) contenant tous les éléments ouverts de C. Ce corps est topologique.

Deux corps topologiques C et C_1 sont *homéomorphes* s'il existe une transformation isomorphe de C en C_1 qui transforme la famille des éléments fermés de C en la famille des éléments fermés de C_1. Les corps C et C_1 sont dits *faiblement homéomorphes* lorsque les corps B(C) et B(C_1) sont homéomorphes.

Un corps d'ensembles additif au sens dénombrable, pourvu d'une fonction satisfaisant aux axiomes I-IV, est dit *corps topologique d'ensembles*.

Envisageons les corps topologiques satisfaisant à l'axiome suivant (analogue à celui de base) :

V. *Il existe une suite d'éléments ouverts* $G_1, G_2, \ldots$ *telle que tout élément ouvert* G *est somme des* G_n *tels que* $\overline{G}_n \subset G$.

On a les théorèmes suivants :

Théorème 1. — *Tout corps topologique d'ensembles assujetti à l'axiome* V *est faiblement homéomorphe au corps de tous les sous-ensembles d'un espace métrique séparable convenablement défini.*

Soit C un corps topologique d'ensembles vérifiant l'axiome V. Soit I un idéal d'ensembles de C, additif au sens dénombrable. Désignons par [X] l'élément du corps-facteur C/I qui contient X. A tout $A \in C/I$, faisons correspondre le plus petit ensemble fermé $F \in C$ tel que $A \subset [F]$. La fonction $\overline{A} = [F]$ vérifie les axiomes I-V. Le corps C/I est donc topologique. Inversement, on a le :

Théorème 2. — *A tout corps topologique* C *assujetti à l'axiome* V *correspondent : un corps topologique d'ensembles* C_1 *assujetti à l'axiome* V *et un idéal* I *additif au sens dénombrable tels que* C *est homéomorphe au corps* C_1/I.

Théorème 3. — *A tout corps topologique C assujetti à l'axiome V, correspond un idéal I additif au sens dénombrable, formé de sous-ensembles du cube fondamental de Hilbert et tel que C est faiblement homéomorphe au corps H/I, où H désigne le corps de tous les sous-ensembles du cube de Hilbert.*

TOPOLOGIE ALGÉBRIQUE. — *Sur les réseaux de courbes sans cycle limite, tracés sur une surface de genre p.* Note (*) de Mme **Pierre-Louis Dubois-Violette.**

Nous nous proposons dans cette Note d'exposer brièvement le principe des démonstrations des propriétés énoncées dans la Note précédente (1).

Nous étudions donc les réseaux de courbes satisfaisant aux conditions énoncées dans la Note en question.

I. *Si un réseau R est tracé sur une surface S de genre $p > 1$ et satisfait aux cinq premières conditions, il ne peut contenir de ruban de courbes qui, suivi indéfiniment ne se ramifie pas et qui se recouvre partiellement.*

Supposons en effet qu'il n'en soit pas ainsi. Soient alors L et L' les courbes frontières d'un ruban π. Nous supposons que ce ruban est pris *aussi large que possible*, c'est-à-dire qu'il existe une courbe de R aussi voisine que l'on veut de L (ou de L') et qui aboutit à un col.

Soit $\alpha\beta$ un arc joignant un point de L à un point de L' et sans contact avec aucune courbe du ruban. On montre qu'il existe toujours un arc $\alpha\beta$.

Supposons que le ruban vienne à se recouvrir partiellement, la courbe L par exemple rencontrant $\alpha\beta$ en α_1. Alors, ou bien les courbes du ruban recouvriront une partie de $\alpha\beta$ excluant l'extrémité β et l'on montre alors que R contient un cycle limite rencontrant $\alpha\beta$, ce qui est impossible ou bien le ruban recouvre en totalité $\alpha_1\beta$ et dans ce cas l'une des courbes du ruban viendra coïncider avec L', les courbes voisines venant se placer de part et d'autre de L'. Par suite L' ne pourra pas être le bord du ruban que nous avons supposé le plus large possible. Nous nous heurtons donc à une impossibilité.

L'existence d'un tel ruban n'est possible que si R n'admet pas de col, c'est-à-dire si S est de genre 1.

II. *Nous considérons désormais un réseau R satisfaisant aux six conditions :*

Théorème. — *Il est impossible d'isoler dans R un ruban de courbes qui, suivi dans un sens, se ramifie indéfiniment et, suivi dans l'autre sens, ne se ramifie pas.*

Supposons qu'il n'en soit pas ainsi. Soit $\alpha\beta$ un arc tracé sur S, sans contact avec R et tel que toutes les courbes de R qui traversent $\alpha\beta$ appartiennent au ruban π dont on suppose l'existence. Nous distinguons par les signes + et — les deux côtés de l'arc $\alpha\beta$ sur la surface S. Nous supposons par exemple que les courbes de R, sortant de $\alpha\beta$ par le côté + ne se ramifient pas.

(*) Séance du 19 mai 1948.

(1) *Comptes rendus*, 226, 1948, p. 1580.

Considérons alors les courbes de S sortant de $\alpha\beta$ par le côté —. Aucune d'elles ne peut retraverser $\alpha\beta$ en entrant par le côté —, car il en serait de même pour toutes les courbes traversant un arc continu $\alpha_1\beta_1$ de $\alpha\beta$ et au delà le pinceau formé ne se ramifierait plus.

D'autre part, si certaines courbes traversent $\alpha\beta$ en entrant par le côté +, ce seront des courbes issues des points d'un arc $\alpha_1\beta_1$ de $\alpha\beta$. Si ces courbes en retraversant $\alpha\beta$ ne couvrent qu'une partie de $\alpha\beta$ les courbes sortant de $\alpha\beta$ par le côté + doivent se ramifier. Si, au contraire, ces courbes couvrent en totalité l'arc $\alpha\beta$, les courbes sortant de $\alpha\beta$ par le côté + retraverseront $\alpha\beta$ sur un arc $\alpha_1\beta_1$ puis sur un arc $\alpha_2\beta_2$, et ainsi de suite et l'on aura $\alpha_n\beta_n \subset \alpha_{n-1}\beta_{n-1} \subset \ldots \subset \alpha\beta$, c'est-à-dire que R admettra uu cycle limite traversant $\alpha\beta$.

Nous arrivons donc dans tous les cas à une impossibilité, d'où l'énoncé :

Théorème. — *Soit* Γ *une courbe fermée tracée sur* S *et présentant un nombre fini de points de contact avec* R; *toute courbe de* R *rencontre* Γ *une infinité de fois.*

Nous distinguons un côté + et un côté — de part et d'autre de Γ sur la surface S.

Si nous considérons l'ensemble des arcs de courbes de R traversant Γ et sortant par le côté +, il y en a un nombre fini, qui aboutissent à un col de R sans avoir avant retraversé Γ. Il y en a, d'autre part, un nombre fini ou nul qui ont leur premier point commun ultérieur avec Γ en un point de contact de Γ avec R. Nous désignons par H_i les points de Γ origine des arcs de courbe de R précédents.

Si l'on considère l'ensemble des courbes de R traversant Γ en sortant par le côté —, on définit de même des points H'_j qui seront en nombre fini et non nul.

On partage ainsi par les points H_i d'une part, par les points H'_j d'autre part chacun des côtés de Γ en un nombre fini d'arcs.

Si l'on considère deux points $H_{i-1}H_i$ consécutifs sur Γ_+, l'ensemble des courbes sortant de Γ_+ par les points de $H_{i-1}H_i$ retraverseront toutes Γ si l'une d'elles traverse Γ. Si aucune des courbes ne traversait Γ, imaginons que l'on suive les mêmes courbes en sens contraire, aucune d'elles ne pourrait traverser Γ une infinité de fois. Par suite aucun point de $H_{i-1}H_i$ ne serait d'accumulation pour aucune courbe de R et la condition (6) serait en défaut.

Il en résulte que *toute courbe traversant* Γ *retraverse* Γ *une infinité de fois.*

D'autre part, si la courbe L passant par H_i aboutit à un col sans avoir traversé Γ, cette séparatrice se prolonge par l'une ou l'autre des deux séparatrices aboutissant au même col et situées immédiatement à droite et à gauche de L. Ces deux séparatrices seront frontières de l'ensemble des courbes traversant les deux arcs d'extrémités H_i sur Γ_+, donc elles rencontreront toutes les deux Γ. Par suite, *toutes les séparatrices aboutissant à un même col traversent* Γ *dès que l'une d'elles traverse* Γ.

Nous voyons alors que l'ensemble des courbes traversant Γ couvre une surface sans frontière, ce qui n'est possible que si l'ensemble des courbes couvre en totalité la surface S supposée connexe. Alors *toute courbe de* R *traverse* Γ *une infinité de fois.*

En particulier nous pouvons prendre pour Γ une courbe fermée limitant sur S une aire simplement connexe A. Nous voyons alors que toute courbe de R traverse l'aire A.

Nous en déduisons immédiatement que si H est un point quelconque de S, on pourra prendre A à l'intérieur d'un voisinage de H sur S aussi petit que l'on veut pourvu qu'en H la condition (5) soit vérifiée.

Donc *une courbe quelconque de* R *admet tout point* H *de* S *comme point d'accumulation.*

GÉOMÉTRIE. — *Courbure et nombres de Betti d'une variété riemannienne compacte.* Note (*) de M. **André Lichnerowicz**, présentée par M. Élie Cartan.

Dans un travail qui vient de me parvenir [1], Bochner étudie un problème dont je m'étais aussi occupé. On sait qu'une variété riemannienne compacte, orientable V_n de courbure constante positive admet mêmes nombres de Betti que la sphère $S_n : b_p(V_n) = 0$ pour $p = 1, 2, \ldots, (n-1)$. On peut chercher dans quelle mesure ce résultat peut être étendu à des variétés V_n compactes, orientables de courbure non constante. Bochner apporte une réponse assez précise à cette question et je me bornerai à quelques résultats complémentaires.

1° La méthode utilise essentiellement la théorie des formes harmoniques de Hodge. Si $T_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p}$ désigne le tenseur antisymétrique associé à une forme harmonique de degré p, on a la formule

$$\frac{1}{2p}\Delta[T^2] = \frac{1}{p} g^{\alpha\beta}\nabla_\alpha T^{\alpha_1\ldots\alpha_p}\nabla_\beta T_{\alpha_1\ldots\alpha_p} - R_{\alpha_1\beta_1} T^{\alpha_1}{}_{\beta_2\ldots\beta_p} T^{\beta_1\beta_2\ldots\beta_p}$$
$$+ \frac{p-1}{2} R_{\alpha_1\beta_1,\alpha_2\beta_2} T^{\alpha_1\beta_1}{}_{\beta_3\ldots\beta_p} T^{\alpha_2\beta_2\beta_3\ldots\beta_p},$$

où s'introduisent les tenseurs classiques de courbure et où

$$T^2 = T^{\alpha_1\ldots\alpha_p} T_{\alpha_1\ldots\alpha_p}.$$

Nous poserons

$$A_{\lambda\mu,\rho\sigma} = \frac{1}{2}[R_{\lambda\sigma}g_{\mu\rho} + R_{\mu\rho}g_{\lambda\sigma} - R_{\lambda\rho}g_{\mu\sigma} - R_{\mu\sigma}g_{\lambda\rho}].$$

Désignons par ($\mathfrak{P}$) une propriété *locale* de la métrique de V_n telle que, quel

(*) Séance du 19 mai 1948.

(1) *Ann. of Math.*, 49, 1948, p. 379-390.

que soit le tenseur antisymétrique $t_{\lambda\mu}$ non identiquement nul, on ait l'inégalité

$$(1) \qquad Q_p(t_{\lambda\mu}) \equiv \left[R_{\lambda\mu,\rho\sigma} + \frac{1}{p-1} A_{\lambda\mu,\rho\sigma}\right] t^{\lambda\mu} t^{\rho\sigma} > 0$$

pour un entier p déterminé. $\Delta[T^2]$ est alors positif ou nul et la fonction T^2 ne peut atteindre son maximum en un point de V_n sans se réduire identiquement à une constante. Par suite le tenseur $T_{\alpha_1 \ldots \alpha_p}$ est nul et $b_p(V_n) = 0$. Nous énoncerons :

Théorème. — *Si une variété riemannienne compacte, orientable V_n admet la propriété $(\mathfrak{P})$ pour un entier p $(1 \leqq p \leqq n-1)$, le nombre de Betti $b_p(V_n)$ correspondant est nul.*

Supposons la courbure de Ricci de V_n partout *positive*. Alors la forme quadratique de coefficients $A_{\lambda\mu,\rho\sigma}$ est définie positive et nous pouvons introduire les valeurs propres $\rho_{\lambda\mu}$ de la matrice $R_{\lambda\mu,\rho\sigma}$ par rapport à $A_{\lambda\mu,\rho\sigma}$ [l'indice $(\lambda\mu)$ joue le rôle d'indice composé]. *La variété V_n admet la propriété $(\mathfrak{P})$ pour les entiers p tels que*

$$(2) \qquad \frac{1}{p-1} > \max|\bar{\rho}_{\lambda\mu}|,$$

où $\bar{\rho}_{\lambda\mu}$ désigne celles des valeurs propres $\rho_{\lambda\mu}$ qui sont négatives.

2° Si $C_{\lambda\mu,\rho\sigma}$ désigne le tenseur de courbure conforme de V_n, on a aussi

$$Q_p(t_{\lambda\mu}) = C_{\lambda\mu,\rho\sigma} t^{\lambda\mu} t^{\rho\sigma} - \frac{2}{p-1}\left[1 - \frac{2(p-1)}{n-2}\right] R_{\lambda\mu} t^{\lambda\rho} t^{\mu}{}_{\rho} - \frac{2R}{(n-1)(n-2)} t^2.$$

Il en résulte par exemple que *toute variété localement conforme à l'espace euclidien et de courbure de Ricci positive admet la propriété $(\mathfrak{P})$*, pour $1 \leqq p \leqq [n/2]$, *et a par suite mêmes nombres de Betti que S_n.*

3° Supposons que la métrique ds^2 de V_n ait été décomposée, aux différents points de V_n, en une somme de deux (ou plusieurs) métriques *locales* de la forme

$$ds^2 = g_{\alpha_1\beta_1}(x^{\gamma_1})\, dx^{\alpha_1} dx^{\beta_1} + g_{\alpha_2\beta_2}(x^{\gamma_2})\, dx^{\alpha_2} dx^{\beta_2} \qquad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1, \ldots = 1, \ldots, r, \\ \alpha_2, \ldots = r+1, \ldots, n. \end{array} \right.$$

Si chacune de ces métriques locales est de courbure de Ricci positive et admet la propriété $(\mathfrak{P})$ pour un entier p déterminé, il en est de même pour la métrique de V_n et $b_p(V_n) = 0$. Ce résultat est applicable par exemple si le ds^2 de V_n est localement réductible à une somme d'éléments linéaires conformes à l'élément euclidien, les courbures de Ricci étant positives.

4° *Si V_n peut être localement plongé dans un espace V_{n+1} de courbure constante $K \geqq 0$ et si sa seconde forme fondamentale Ω_{ij} est définie, les deux nombres de Betti $b_1(V_n)$ et $b_2(V_n)$ sont nuls.*

Il suffit de vérifier la propriété $(\mathfrak{P})$ pour $p = 2$ et d'introduire à cet effet les valeurs propres de la matrice Ω_{ij} qui ne sont autres que les courbures principales ρ_u de V_n. La propriété $(\mathfrak{P})$ est satisfaite pour les entiers p tels que, quels

que soient a et b distincts

$$\frac{1}{p-1} > \frac{\rho_a}{\sum_{k \neq b} \rho_k}. \tag{3}$$

Par suite, *si la plus petite courbure principale est supérieure à la moitié de la plus grande, la variété* V_n *a mêmes nombres de Betti que la sphère* S_n.

GÉOMÉTRIE INFINITÉSIMALE. — *Sur une infinité de systèmes cycliques attachés en un point d'une cyclide générale.* Note (*) de M. **Fernand Backes**, présentée par M. Paul Montel.

1. Soit $\sum \frac{x_i^2}{a_i} = 0$, où a_i $(i = 1, \ldots, 5)$ désignent des constantes, l'équation canonique d'une cyclide en coordonnées pentasphériques; cette surface admet, on le sait, la représentation paramétrique

$$x_i = \sqrt{\frac{a_i(a_i - u)(a_i - v)}{f'(a_i)}} \quad \text{où} \quad f(t) = \prod_{i=1}^{5}(t - a_i).$$

La décomposition de la fraction rationnelle $t^n/f(t)$ en éléments simples permet de montrer que la somme $\sum \frac{a_i^n}{f'(a_i)}$ est nulle pour $n = 0, 1, 2, 3$, égale à un ou à Σa_i suivant que $n = 4$ ou que $n = 5$. Ces formules sont utiles pour l'obtention des résultats qui vont suivre.

2. La sphère S_0, représentée par l'équation $\Sigma X_i(x_i/a_i) = 0$, où les X_i désignent les coordonnées courantes, est tangente à la cyclide au point x_i; ses cinq coordonnées x_i/a_i sont solutions de l'équation de Laplace du type d'Euler-Poisson $E(-1/2, -1/2)$, la même que celle à laquelle satisfont les coordonnées x_i du point générateur P de la cyclide. La sixième coordonnée de S_0, égale à $\sqrt{uv}$ (à un facteur près), vérifie la même équation, de sorte que S_0 est une sphère de Ribaucour; le second point P_0 où elle touche son enveloppe est défini par les équations

$$\Sigma X_i \frac{x_i}{a_i} = 0, \qquad \Sigma X_i \frac{x_i}{a_i - u} = 0, \qquad \Sigma X_i \frac{x_i}{a_i - v} = 0, \tag{1}$$

dont les deux dernières sont celles d'un cercle Γ_0 engendrant un système cyclique.

Les sphères d'équations $\Sigma X_i x_i(a_i - u) = 0$, $\Sigma X_i x_i(a_i - v) = 0$ sont orthogonales à chacune des sphères (1); elles définissent donc un cercle de foyers P, P_0, lequel engendre une congruence dont, en vertu d'un théorème connu, u, v

(*) Séance du 19 mai 1948.

sont les paramètres des périsphères. Les sphères indiquées sont précisément les sphères focales du cercle; la forme de leurs équations prouve que le point P_0 aura pour coordonnées $x_i(a_i+k)$, où k sera déterminé par la condition $\Sigma x_i^2(a_i+k)^2=0$. On obtient ainsi pour P_0 les coordonnées $\xi_i=x_i(2a_i+u+v-A)$, où A désigne Σa_i, et, si l'on forme l'équation de Laplace à laquelle satisfont ces expressions, on trouve

$$2(u-v)\frac{\partial^2\xi}{\partial u\,\partial v}+\frac{A-u-3v}{A-v-3u}\frac{\partial\xi}{\partial u}-\frac{A-v-3u}{A-u-3v}\frac{\partial\xi}{\partial v}=0.$$

3. Considérons plus généralement une sphère S_h tangente au point x_i de la cyclide et représentée par l'équation $\Sigma X_i x_i[(1/a_i)+h]=0$, h étant supposé constant. Tout comme pour S_0, les six coordonnées de S_h sont aussi solutions de $E(-1/2,\,-1/2)$; ainsi, lorsque h varie, toute sphère S_h est une sphère de Ribaucour.

Si P_h désigne son second point caractéristique, le cercle Γ_h orthogonal à S_h aux points P, P_h, et défini par les équations

$$(u+h)\sum X_i\frac{x_i}{a_i-u}=(v+h)\sum X_i\frac{x_i}{a_i-v}=-h\sum X_i x_i,$$

engendre un système cyclique. Ces cercles sont situés sur une sphère orthogonale à la cyclide au point x_i; elle a pour équation

$$\sum X_i\frac{x_i a_i}{(a_i-u)(a_i-v)}=0,$$

et ses cinq coordonnées vérifient l'équation $E(1/2,\,1/2)$, de sorte que u, v sont les paramètres des lignes principales de l'enveloppe.

4. Il est curieux de constater que les sphères de courbure normale au point x_i, et dont les équations $\Sigma X_i x_i(1/a_i-1/u)=0$, $\Sigma X_i x_i(1/a_i-1/v)=0$ prouvent que l'on n'a pas affaire à des sphères S_h, sont telles que leurs six coordonnées sont aussi solutions de $E(-1/2,\,-1/2)$. Ce sont des sphères de Ribaucour pour lesquelles les deux nappes de l'enveloppe coïncident.

5. Nous terminerons cette Note en considérant la famille de sphères admettant les cinq coordonnées

$$x_i\left(1+\frac{\lambda}{a_i-u}+\frac{\mu}{a_i-v}\right),$$

où λ, μ désignent des constantes arbitraires. Ces expressions ne peuvent satisfaire à une équation $E(\beta,\,\beta')$ que si $\lambda=\mu$ et $\beta=\beta'=-1/2$; on obtient ainsi une infinité simple de sphères coupant orthogonalement la cyclide au point x_i et telles que u, v sont les paramètres des lignes principales sur les deux nappes de l'enveloppe.

CALCUL DES PROBABILITÉS. — *Le regroupement des classes d'une table de contingence et ses applications à la génétique.* Note (*) de M. **Gustave Malécot**, transmise par M. Émile Borel.

Soient dans une *population infinie* d'éléments *e* classés suivant deux caractères prenant respectivement les états A_i et B_j, P_{ij} la probabilité des éléments présentant à la fois les états A_i et B_j, $\alpha_i=\sum_j P_{ij}$ et $\beta_j=\sum_i P_{ij}$ les probabilités marginales. Posons

$$(1)\qquad P_{ij}=\alpha_i\beta_j\left[1+\sum_{r=1}^{R}\lambda_i^{(r)}\mu_j^{(r)}\right].$$

Les *paramètres de corrélation* $\lambda_i^{(r)}$ et $\mu_j^{(r)}$ sont liés par les relations

$$(1')\qquad \sum_i \alpha_i\lambda_i^{(r)}=0,\qquad \sum_j \beta_j\mu_j^{(r)}=0,$$

et peuvent toujours être calculés en fonction des P_{ij} si R est assez grand.

Regroupons les éléments *e* en *classes composites* C_l et D_m de la façon suivante : *e* est affecté à la nouvelle classe C_l avec la probabilité ρ_{il} s'il appartient à la classe A_i, à la classe D_m avec la probabilité θ_{jm} indépendante des ρ_{il}, s'il appartient à la classe B_j. La probabilité totale que *e* appartienne à la fois aux classes C_l et D_m peut s'écrire

$$(2)\qquad \pi_{lm}=\sum_{ij}P_{ij}\rho_{il}\theta_{jm}=\gamma_l\delta_m\left[1+\sum_r \nu_l^{(r)}\sigma_m^{(r)}\right],$$

γ_l étant la probabilité totale de C_l, δ_m celle de D_m, $\nu_l^{(r)}$ la valeur moyenne de $\lambda_i^{(r)}$ dans C_l, $\sigma_m^{(r)}$ celle de $\mu_j^{(r)}$ dans D_m. On a évidemment

$$(2')\qquad \sum\gamma_l=1,\qquad \sum\delta_m=1,\qquad \sum\gamma_l\nu_l^{(r)}=0,\qquad \sum\delta_m\sigma_m^{(r)}=0,$$

(2) et (2') représentent l'extension de (1) et (1') aux *classes composites*, les paramètres de corrélation des nouvelles classes étant les valeurs moyennes de ceux des anciennes.

Application à la Génétique. — Soit F_0 une population mendélienne infiniment nombreuse ; soient A_i et B_j les génotypes présentés respectivement par les mâles et les femelles. Prenons pour *e* les couples de parents ; P_{ij} est la probabilité que A_i et B_j soient les génotypes du père et de la mère dans un couple pris au hasard dans F_0 ; α_i et β_j les probabilités des génotypes du père et de la mère.

(*) Séance du 19 mai 1948.

Il y a *accouplement au hasard* si $P_{ij} = \alpha_i \beta_j$. Sinon, il y a *accouplement préférentiel*. Le *système d'accouplement* peut alors être défini par la donnée de *paramètres de préférence* $\lambda_i^{(r)}$ et $\mu_j^{(r)}$ satisfaisant à (1) et (1'). Les lois de Mendel donnent la composition génétique *à la naissance* de la génération suivante F_1 en fonction des α_i, β_j, $\lambda_i^{(r)}$ et $\mu_j^{(r)}$, donc *les* α'_i et β'_j de F_1 si l'on connaît les *coefficients de sélection zygotiques*.

Exemple. — Soient P, 2Q, R les probabilités qu'un enfant S naissant présente les états zygotiques autosomaux AA, A*a*, *aa*. Plaçons respectivement le père et la mère de S dans les *classes composites* C_1 ou C_2, D_1 ou D_2 suivant qu'ils ont transmis à S le gène A ou *a*. On a d'après (2') : $\gamma_2 = 1 - \gamma_1$, $\gamma_1 \nu_1^{(r)} = -\gamma_2 \nu_2^{(r)}$, etc. D'où

$$(3) \quad P = \pi_{11} = \gamma_1 \delta_1 + \mu, \qquad 2Q = \pi_{12} + \pi_{21} = \gamma_1 \delta_2 + \gamma_2 \delta_1 - 2\mu, \qquad R = \pi_{22} = \gamma_2 \delta_2 + \mu,$$

μ, *coefficient d'homogamie*, dépend des valeurs moyennes des paramètres de préférence des divers génotypes fournissant A ou *a*, donc de leurs fréquences. *h* et σ étant des *coefficients de sélection zygotiques*, les probabilités des trois états zygotiques chez les individus de F_1 qui deviennent pères et mères sont donnés par

$$(4) \qquad \frac{P_1}{P} = \frac{2Q_1}{2(1 - h\sigma)Q} = \frac{R_1}{(1-\sigma)R}.$$

En reclassant de la même façon les individus de F_1 on a

$$(5) \qquad \gamma'_1 = \delta'_1 = P_1 + Q_1, \qquad \gamma'_2 = \delta'_2 = Q_1 + R_1.$$

Les γ et δ sont égaux dès la deuxième génération. (3) devient alors en la prenant pour origine et en posant : $\gamma_1 = \delta_1 = p$; $\gamma_2 = \delta_2 = q = 1 - p$; $\gamma'_1 = \delta'_1 = p'$ etc. et $\mu = \lambda pq$:

$$P = p(p + \lambda q), \qquad 2Q = 2pq(1 - \lambda), \qquad R = q(q + \lambda p).$$

Et, si σ est petit, (4) et (5) donnent

$$q' = q + \sigma q(1 - q)[(2h - 1)(1 - \lambda)q + h\lambda - \lambda - h],$$

ce qui étend au *cas d'homogamie* tous les résultats que nous avons établis (1). Si par contre $\sigma = 1$, l'étude de M. Teissier (2) s'étend au cas d'homogamie, en posant avec lui $1 - h = \sigma_2/\sigma_1$ et en remarquant qu'alors

$$\frac{1}{q'} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2(1 - \lambda)q} + 2 - \frac{\sigma_1}{\sigma_2},$$

formule dont l'itération montre qu'il y a *équilibre asymptotique* si $\sigma_2 > \sigma_1(1 - \lambda)$ et *élimination du gène a* dans le cas contraire.

---

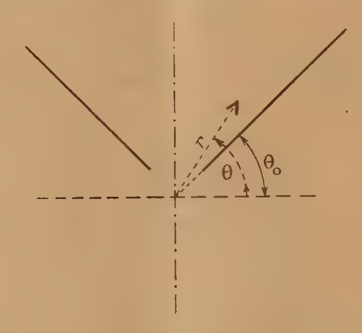
(1) G. Malecot, *Les Mathématiques de l'Hérédité*, Masson, 1948, p. 38 et suivantes.
(2) *Revue Scientifique*, 82, 1944, p. 145.

AÉRODYNAMIQUE. — *Équation de la couche limite laminaire dans un convergent conique.* Note (*) de M. **Léon Agostini**, présentée par M. Joseph Pérès.

L'équation de la couche limite laminaire a été mise sous la forme d'une équation différentielle dans le cas d'un écoulement plan où la vitesse dans le fluide libre varie suivant la loi $u = kx^m$; cette équation a été résolue pour toutes les valeurs de m supérieures à $-0,09$ au moyen de l'analyseur différentiel (1).

Il est possible d'établir une équation analogue pour la couche limite laminaire d'un écoulement de révolution dans un convergent conique.

Soient u et v les composantes radiales et tangentielles dans le plan méridien de la vitesse, r et θ les coordonnées polaires dans ce plan (*fig.* 1). L'équation de



continuité du fluide incompressible peut être satisfaite en posant

$$u\cos\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}, \qquad v\cos\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial(r\psi)}{\partial r}.$$

Avec les approximations usuelles, l'équation de Navier pour la composante u s'écrit dans la couche limite

$$u\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r}v\frac{\partial u}{\partial\theta} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\nu}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} - \nu\frac{\operatorname{tg}\theta}{r^2}\frac{\partial u}{\partial\theta},$$

le gradient de pression est déduit de la relation de Bernoulli

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} = u_0\frac{du_0}{dr},$$

où u_0 est la vitesse dans le fluide libre qui est supposée ne dépendre que de r,

(*) Séance du 10 mai 1948.

(1) D. R. Hartree, *Proc. Cambr. Phil. Soc.*, 33, 1937, p. 223-239.

tout au moins au voisinage de la paroi; nous poserons $u_0 = -kr^{-m}$. Soit θ_0 le complément du demi-angle au sommet du cône ($\theta_0 = 0$ pour un orifice en paroi plane); faisons les changements de variable et de fonction définis par

$$(1) \qquad \psi = \sqrt{\frac{\beta+2}{3}}\sqrt{\nu k}\, f(z)\, r^{-\frac{m-1}{2}} \cos\theta_0,$$

$$(2) \qquad z = \sqrt{\frac{3}{\beta+2}}\sqrt{\frac{k}{\nu}}\, r^{-\frac{m+1}{2}} \frac{\sin\theta - \sin\theta_0}{\cos\theta_0},$$

où l'on a posé $\beta = (2m)/(3-m)$ ($\beta = 4$ pour $m = 2$ correspondant à l'écoulement d'un fluide incompressible par couches sphériques). La fonction $f(z)$ satisfait à l'équation différentielle

$$(2') \qquad f''' = ff'' + \beta(f'^2 - 1) + 2\sqrt{\frac{\beta+2}{3}}\frac{\operatorname{tg}\theta_0}{\sqrt{R_r}}(zf'')' + \frac{\beta+2}{3}\frac{1}{R_r}(z^2 f'')',$$

où l'on a posé $R_r = (|u_0|r)/(\nu)$.

La vitesse u dans la couche limite est donnée par $u/u_0 = f'$.

Pour θ peu différent de θ_0 la variable sans dimension z peut s'écrire

$$z = \sqrt{\frac{3}{\beta+2}}\sqrt{R_r}(\theta - \theta_0);$$

elle pourra, si R_r est grand, être assez grande pour qu'on puisse admettre, comme dans le problème plan, qu'elle est infinie hors de la couche limite et poser, comme condition limite, $\lim f' = 1$, pour z infini.

La solution correspondante a toutes ses dérivées nulles à l'infini, et, en outre, pour z infini $\lim(f/z) = 1$.

Soit f une fonction satisfaisant à ces conditions et de plus solution de l'équation simplifiée

$$(3) \qquad f''' = ff'' + \beta(f'^2 - 1),$$

obtenue en négligeant dans (2) les termes en R_r, et qui pourrait se ramener à l'équation de Hartree en changeant f et β de signe. Il est facile de montrer que $(zf'')'$ et $(z^2 f'')'$ tendent vers zéro pour z infini. Les deux derniers termes de (2) peuvent donc bien être négligés si R_r est assez grand.

Le nombre de Reynolds $R_r = (k/\nu r^{m-1})$ varie en sens inverse de r, la région de validité de (3) s'étendra donc à une distance finie en amont de l'orifice.

La résolution de l'équation (3) par un développement de f en série entière conduit à une série lentement convergente pour les grandes valeurs de β. Elle peut cependant montrer que pour $\beta = 4$ la valeur de $f''(0)$ doit être voisine de 2. La résolution par la même méthode de l'équation complète (2) montre que pour $\theta_0 = 0$, les termes contenant R_r introduisent sur les coefficients des erreurs relatives de l'ordre de $1/R_r$.

AÉRODYNAMIQUE. — *Utilisation du fil chaud pour l'étude visuelle et acoustique de la transition dans la couche limite.* Note (*) de MM. **Maurice Ménard** et **Roger Michel**, présentée par M. Joseph Pérès.

Il est usuel en Aérodynamique de déterminer la position du point de transition le long d'une paroi au moyen d'une prise totale placée contre cette paroi et reliée à un sthétoscope. La prise se trouvant dans la couche laminaire, l'observateur entend au sthétoscope un souffle continu allant en décroissant de l'amont vers l'aval; dans la zone turbulente établie, le bruit a l'allure d'un crépitement violent, mais le passage de l'un à l'autre bruit se fait au travers d'une zone de transition dont les limites sont généralement mal définies. L'analyse des bruits entendus au sthétoscope est, dans ces conditions, très délicate; aussi avons-nous cherché à étudier la transition par d'autres moyens.

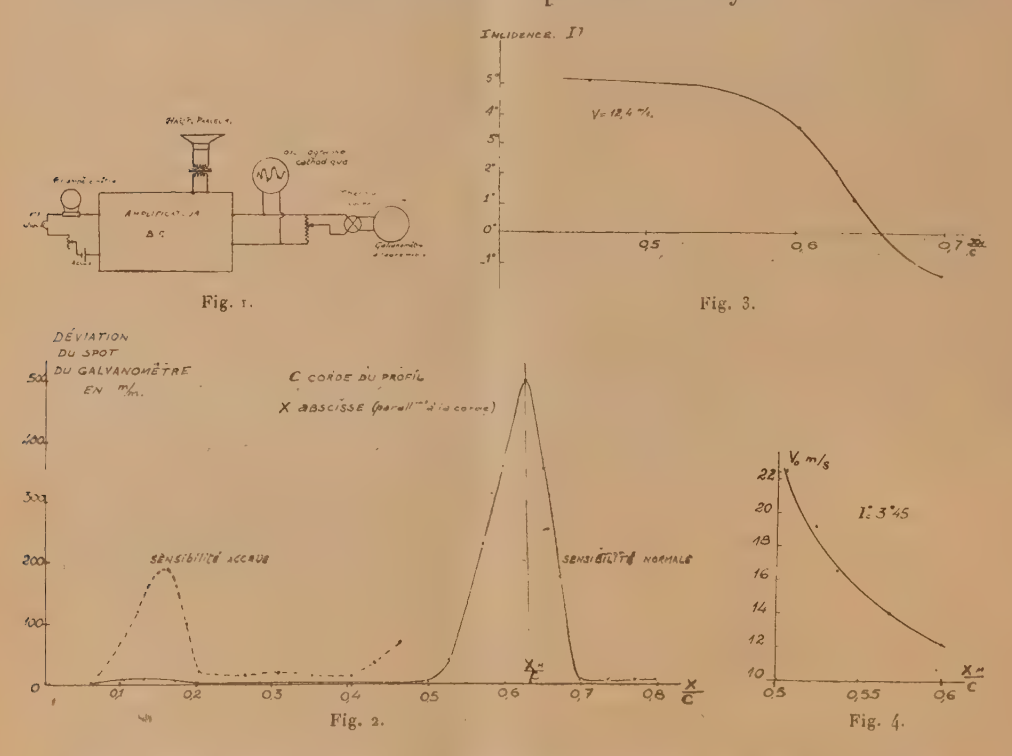


Fig. 1. Fig. 3.

Fig. 2. Fig. 4.

Nous avons placé à l'extrados d'une aile en soufflerie, et à $0^{mm},5$ de la paroi, un fil chaud anémométrique de diamètre $0^{mm},012$, chauffé par accumulateur; la différence de potentiel aux bornes de ce fil attaquait la grille de la lampe

(*) Séance du 10 mai 1948.

d'entrée d'un amplificateur basse fréquence; le courant de sortie de cet amplificateur était envoyé simultanément à un haut-parleur électrodynamique et à un oscillographe cathodique (*fig.* 1). Dans ces conditions, le haut-parleur reproduit très fidèlement les bruits entendus au sthétoscope, dans la couche laminaire, le souffle continu décroît; la fin de la zone laminaire se manifeste par l'apparition de chocs espacés augmentant de fréquence et d'amplitude vers l'aval, jusqu'à reproduire le crépitement turbulent; ce crépitement diminue ensuite vers le bord de fuite.

A l'oscillographe des phénomènes comparables sont observés : en laminaire (pour la sensibilité adaptée aux agitations turbulentes) le signal existant sur l'écran est animé d'oscillations très petites; dans la zone de transition apparaissent de brusques vibrations d'abord espacées dans le temps, puis de plus en plus fréquentes et importantes; l'amplitude de ces vibrations passe par un maximum pour redécroître ensuite dans la zone turbulente établie. Le fil chaud permet donc l'amplification des *bruits de couche limite*; il permet en outre d'observer sur un écran d'oscillographe l'image des agitations de vitesse. Nous avons de plus essayé de mesurer l'intensité moyenne d'agitation : dans ce but le courant de sortie de l'amplificateur, redressé par thermo-couple, a été mesuré au moyen d'un galvanomètre à cadre mobile amorti; nous avons pu noter une évolution importante de la déviation du spot du galvanomètre en fonction de la position du fil chaud sur le profil.

A titre indicatif, la figure 2 donne la déviation du spot du galvanomètre en fonction de la position du fil chaud sur le profil pour une incidence de 3°30′; on voit sur cette figure qu'il existe un maximum d'agitation bien déterminé. La position et la valeur de ce maximum d'agitation peuvent éventuellement représenter des caractéristiques aérodynamiques du profil.

Sur les figures 3 et 4 est donnée la position du maximum, en fonction de l'incidence du profil et de la vitesse de référence.

MÉCANIQUE ONDULATOIRE. — *Sur les équations de propagation des ondes de la théorie de l'électron de Dirac dans un champ magnétique*. Note (*) de M. **Gérard Petiau**.

La théorie de l'électron de Dirac représente le corpuscule de spin $h/4\pi$, de masse propre m_0 et de charge e placé dans le champ magnétique $\mathbf{H}(x, y, z)$ de potentiel vecteur $\mathbf{A}$ par les fonctions d'ondes ψ_k, $(k=1, 2, 3, 4)$, solutions du système

$$[p_0+\mathbf{P}\alpha+m_0c\alpha_4]\psi_k=0, \tag{1}$$

$$\left(p_0=-i\hbar\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t};\ \mathbf{P}=i\hbar\frac{\partial}{\partial x}+\varepsilon\mathbf{A};\ \hbar=\frac{h}{2\pi};\ \varepsilon=\frac{e}{c};\ \alpha_\mu\alpha_\nu+\alpha_\nu\alpha_\mu=2\delta_{\mu\nu}\quad(\mu,\nu=1,2,3,4)\right).$$

Introduisant les matrices de spin $\sigma=i\alpha_2\alpha_3,\ i\alpha_3\alpha_1,\ i\alpha_1\alpha_2$, on voit facilement

(*) Séance du 19 mai 1948.

que les fonctions ψ_k satisfont à l'équation d'ondes du second ordre

$$\{p_0^2 - \mathbf{P}^2 - m_0^2 c^2 - \varepsilon\hbar(\mathbf{H}c)\}\psi_k = 0. \tag{2}$$

Cette équation développée nous donne deux systèmes identiques de deux équations relatifs, l'un aux fonctions ψ_1 et ψ_2, l'autre aux fonctions ψ_3 et ψ_4. Nous obtenons ainsi

$$\left\{\begin{array}{l} [p_0^2 - \mathbf{P}^2 - m_0^2 c^2 - \varepsilon\hbar \mathrm{H}_z]\psi_1 - \varepsilon\hbar(\mathrm{H}_x + i\mathrm{H}_y)\psi_2 = 0, \\ [p_0^2 - \mathbf{P}^2 - m_0^2 c^2 + \varepsilon\hbar \mathrm{H}_z]\psi_2 - \varepsilon\hbar(\mathrm{H}_x - i\mathrm{H}_y)\psi_1 = 0. \end{array}\right. \tag{3}$$

L'élimination de ψ_2 entre ces équations nous donne, désignant par ∇ l'opérateur gradient $(\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$,

$$\begin{aligned} \Big\{ & [p_0^2 - \mathbf{P}^2 - m_0^2 c^2]^2 - 2\left[i\hbar\left(\nabla \log(\mathrm{H}_x - i\mathrm{H}_y).\mathbf{P}\right) + \hbar^2\left(\nabla \log(\mathrm{H}_x + i\mathrm{H}_y)\right)^2\right] \\ & \times [p_0^2 - \mathbf{P}^2 - m_0^2 c^2] + 2i\varepsilon\hbar^2 \mathrm{H}_z\left[\nabla \log\left(\frac{\mathrm{H}_x + i\mathrm{H}_y}{\mathrm{H}_z}\right).\mathbf{P}\right] \\ & - 2\varepsilon\hbar^2 \mathrm{H}_z\left[\nabla \log(\mathrm{H}_x - i\mathrm{H}_y).\nabla \log\left(\frac{\mathrm{H}_x + i\mathrm{H}_y}{\mathrm{H}_z}\right)\right] - \varepsilon^2\hbar^2\mathbf{H}^2\Big\}\psi_1 = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

De même, l'élimination de ψ_1 donne pour ψ_2 une équation analogue dans laquelle H_x, $-\mathrm{H}_y$, $-\mathrm{H}_z$ remplacent H_x, H_y, H_z.

Nous obtenons ainsi pour déterminer l'évolution *individuelle* des fonctions d'ondes de Dirac dans un champ magnétique des équations aux dérivées partielles du quatrième ordre, ce résultat s'étendant facilement au cas du champ électromagnétique général $\mathbf{E}(x, y, z, t)$, $\mathbf{H}(x, y, z, t)$.

Nous caractériserons la structure du champ par les fonctions vectorielles et scalaires C et D définies par

$$\left\{\begin{aligned} \mathbf{C}_1 + i\mathbf{D}_1 &= \nabla \log(\mathrm{H}_x^2 + \mathrm{H}_y^2)^{\frac{1}{2}} + i\nabla \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\mathrm{H}_y}{\mathrm{H}_x}\right), \\ \mathrm{C}_2 - i\mathrm{D}_2 &= \left[\nabla \log(\mathrm{H}_x^2 + \mathrm{H}_y^2)^{\frac{1}{2}}\right]^2 - \left[\nabla \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\mathrm{H}_y}{\mathrm{H}_x}\right)\right]^2 \\ &\quad + i\left[\nabla \log(\mathrm{H}_x^2 + \mathrm{H}_y^2).\nabla \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\mathrm{H}_y}{\mathrm{H}_x}\right)\right], \\ \mathbf{C}_3 - i\mathbf{D}_3 &= \mathrm{H}_z \nabla \log\left[\frac{(\mathrm{H}_x^2 + \mathrm{H}_y^2)}{\mathrm{H}_z^2}\right]^{\frac{1}{2}} - i\mathrm{H}_z \nabla \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\mathrm{H}_y}{\mathrm{H}_x}\right). \\ \mathrm{C}_4 + i\mathrm{D}_4 &= \mathrm{H}_z\left[\nabla \log(\mathrm{H}_x^2 + \mathrm{H}_y^2)^{\frac{1}{2}}.\nabla \log\left[\frac{(\mathrm{H}_x^2 + \mathrm{H}_y^2)}{\mathrm{H}_z^2}\right]^{\frac{1}{2}}\right] - \left[\nabla \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\mathrm{H}_y}{\mathrm{H}_x}\right)\right]^2 \\ &\quad + i\mathrm{H}_z\left[\nabla \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\mathrm{H}_y}{\mathrm{H}_x}\right).\nabla \log\left[\frac{(\mathrm{H}_x^2 + \mathrm{H}_y^2)}{\mathrm{H}_z}\right]\right]. \end{aligned}\right. \tag{5}$$

Introduisant ces expressions dans l'équation (4) divisée par $(2m_0)^2$ et posant $\mu_0 = e\hbar/2m_0c$, cette équation s'écrit

$$\begin{aligned} \Big\{ & \left[\frac{1}{2m_0}(p_0^2 - \mathbf{P}^2 - m_0^2 c^2)\right]^2 \\ & - \left(\frac{\hbar}{m_0}\right)[i(\mathbf{C}_1 - i\mathbf{D}_1).\mathbf{P} + \hbar(\mathrm{C}_2 - i\mathrm{D}_2)]\left[\frac{1}{2m_0}(p_0^2 - \mathbf{P}^2 - m_0^2 c^2)\right] \\ & + \left(\frac{\hbar}{m_0}\right)\mu_0[i(\mathbf{C}_3 + i\mathbf{D}_3).\mathbf{P} + \hbar(\mathrm{C}_4 + i\mathrm{D}_4)] - \mu_0^2\mathbf{H}^2\Big\}\psi_1 = 0. \end{aligned} \tag{6}$$

L'équation (6) se simplifie dans deux cas particuliers importants :

1° $H_z = 0$; H_x, $H_y \neq 0$. Il nous reste alors

$$(7) \quad \left\{ \left[\frac{1}{2m_0}(p_0^2 - \mathbf{P}^2 - m_0^2 c^2) \right]^2 - \mu_0^2 \mathbf{H}^2 - \left(\frac{\hbar}{m_0} \right) [(i\mathbf{C}_1 - \mathbf{D}_1).\mathbf{P} + \hbar(C_2 + iD_2)] \left[\frac{1}{2m_0}(p_0^2 - \mathbf{P}^2 - m_0^2 c^2) \right] \right\} \psi_1 = 0.$$

Le moment magnétique n'intervient plus que dans le terme en $\mathbf{H}^2$ et les équations en ψ_1 et ψ_2 ne diffèrent que par les signes devant $\mathbf{D}_1$ et D_2.

2° $H_y = 0$; H_x, $H_z \neq 0$. Les coefficients D sont tous nuls et (6) s'écrit

$$(8) \quad \left\{ \left[\frac{1}{2m_0}(p_0^2 - \mathbf{P} - m_0^2 c^2) \right]^2 - \left(\frac{\hbar}{m_0} \right) \left[i\nabla \log H_x.\mathbf{P} + \hbar(\nabla \log H_x)^2 \right] \left[\frac{1}{2m_0}(p_0^2 - \mathbf{P}^2 - m_0^2 c^2) \right] + \left(\frac{\hbar}{m_0} \right) \mu_0 H_z \left[i\nabla \log\left(\frac{H_x}{H_z} \right).\mathbf{P} + \hbar\left(\nabla \log H_x . \nabla \log\left(\frac{H_x}{H_z} \right) \right) \right] - \mu_0^2 \mathbf{H}^2 \right\} \psi_1 = 0,$$

l'équation en ψ_2 se déduisant de celle-ci par le changement de signe de H_z.

Dans le cas où il est légitime de négliger les termes ayant en facteur le magnéton de Bohr μ_0, l'équation (6) se réduit à

$$(9) \quad \left[\frac{1}{2m_0}(p_0^2 - \mathbf{P}^2 - m_0^2 c^2) - \left(\frac{\hbar}{m_0} \right) [(i\mathbf{C}_1 - \mathbf{D}_1).\mathbf{P} + \hbar(C_2 + iD_2)] \right] \left[\frac{1}{2m_0}(p_0^2 - \mathbf{P}^2 - m_0^2 c^2) \right] \psi_1 = 0.$$

Cette équation sera satisfaite en particulier par les fonctions ψ_1 telles que

$$(10) \quad \left(\frac{1}{2m_0} \right) [p_0^2 - \mathbf{P}^2 - m_0^2 c^2] \psi_1 = 0,$$

et ceci nous montre qu'à cette approximation il existe parmi les solutions de (1) une classe de fonctions d'ondes satisfaisant à l'équation de Gordon et pour laquelle on peut définir une approximation de l'optique géométrique dans laquelle le corpuscule se comporte comme un corpuscule chargé classique. Mais l'équation (9) nous montre qu'à la même approximation il existe pour le corpuscule de Dirac des classes de mouvements plus générales dans lesquelles celui-ci échappe aux lois classiques et où se manifeste l'influence du spin par le signe des coefficients $\mathbf{D}_1$ et D_2. L'approximation qui nous a conduit aux équations (9) et (10) est justifiée dans le cas de l'électron, mais on peut voir qu'il n'en serait pas de même dans le cas d'un corpuscule de même charge mais dont la masse propre serait beaucoup plus petite [1]; l'équation d'ondes complète (6) devrait alors être considérée.

---

[1] Ce cas pourrait être celui des corpuscules signalés par M. J. Thibaud et auxquels il a donné le nom d'électrinos. *Comptes rendus*, 223, 1946, p. 984; 225, 1947, p. 934-936 et 999-1001.

MÉCANIQUE ONDULATOIRE. — *Sur les propriétés du champ mésonique.* Note de M. **Robert Potier**.

Nous avons déjà signalé (¹) une représentation du corpuscule de spin maximum 1, à masses multiples. L'objet de la présente Note est de déduire cette représentation d'un Lagrangien convenablement choisi, et de calculer les interactions entre nucléons s'effectuant par l'intermédiaire du champ mésonique.

Soit donc la fonction

$$(1)\quad \mathcal{L}=\varepsilon\left\{\frac{1}{2}\left(\vec{\mathcal{E}}^2-\vec{\mathcal{H}}^2+m_+^2\left(\mathcal{V}^2-\vec{\mathcal{V}}^2\right)-m_-^2\left(\mathcal{S}^2-\vec{\mathcal{S}}^2\right)+\frac{M_-^2}{m_-^2}J^2-\frac{M_+^2}{m_+^2}I^2\right)\right.$$
$$\left.+\vec{\mathcal{V}}.\vec{\mathcal{V}}_0-\vec{\mathcal{S}}.\vec{\mathcal{S}}_0-\mathcal{V}\mathcal{V}_0+\mathcal{S}\mathcal{S}_0\right\},$$

où $\vec{\mathcal{E}}$ et $\vec{\mathcal{H}}$ représentent un tenseur antisymétrique de rang 2, $\mathcal{V}$ et $\vec{\mathcal{V}}$ un quadrivecteur, $\mathcal{S}$ et $\vec{\mathcal{S}}$ un pseudo-quadrivecteur, I un invariant, J un pseudo-invariant, ces quantités s'obtenant à partir des ψ_{rs}^{pq} de notre Note précédente (¹) par des combinaisons linéaires.

Définissons les champs par les équations

$$(2)\quad \begin{cases} \vec{\mathcal{H}}=\vec{\mathcal{H}}_0+\partial_t\vec{\mathcal{S}}+\overrightarrow{\text{grad}}\,\mathcal{S}+\text{rot}\,\vec{\mathcal{V}}, & \vec{\mathcal{E}}=\vec{\mathcal{E}}_0-\partial_t\vec{\mathcal{V}}-\overrightarrow{\text{grad}}\,\mathcal{V}+\text{rot}\,\vec{\mathcal{S}}, \\ I=\dfrac{m_+^2}{M_+^2}\left(\partial_t\mathcal{V}+\text{div}\,\vec{\mathcal{V}}\right)+\dfrac{I_0}{M_+^2}, & J=\dfrac{m_-^2}{M_-^2}\left(\partial_t\mathcal{S}+\text{div}\,\vec{\mathcal{S}}\right)+\dfrac{J_0}{M_-^2}. \end{cases}$$

Dans (1) et (2) les $\vec{\mathcal{H}}_0$, $\vec{\mathcal{E}}_0$, I_0, J_0, $\mathcal{V}_0$, $\vec{\mathcal{V}}_0$, $\mathcal{S}_0$, $\vec{\mathcal{S}}_0$ sont des quantités réelles de même variance que les quantités sans l'indice o, formées à partir des fonctions d'onde des nucléons d'un système et des fonctions conjuguées.

De (1) et (2), on déduit quatre équations de Lagrange

$$(3)\quad \begin{cases} \partial_t I+\text{div}\,\vec{\mathcal{E}}+m_+^2\mathcal{V}-\mathcal{V}_0=0, & \partial_t J-\text{div}\,\vec{\mathcal{H}}+m_-^2\mathcal{S}-\mathcal{S}_0=0, \\ \partial_t\vec{\mathcal{E}}-\text{rot}\,\vec{\mathcal{H}}+\overrightarrow{\text{grad}}\,I-m_+^2\vec{\mathcal{V}}+\vec{\mathcal{V}}_0=0, & \partial_t\vec{\mathcal{H}}-\overrightarrow{\text{grad}}\,J+\text{rot}\,\vec{\mathcal{E}}+m_-^2\vec{\mathcal{S}}-\vec{\mathcal{S}}_0=0. \end{cases}$$

L'ensemble (2) et (3) est, en l'absence de nucléons, équivalent aux 16 équations de notre Note précédente (¹).

L'énergie totale du système est donnée par l'hamiltonien

$$H=\varepsilon\int\left[\left(J\dot{\mathcal{S}}-I\dot{\mathcal{V}}-\vec{\mathcal{E}}.\dot{\vec{\mathcal{V}}}-\vec{\mathcal{H}}.\dot{\vec{\mathcal{S}}}\right)-\mathcal{L}\right]d\tau,$$

l'intégrale, comme toutes celles qui vont suivre, étant étendue à tout l'espace.

(¹) *Comptes rendus*, **226**, 1948, p. 63-64.

La solution statique du système (2) et (3) est donnée par

$$(5)\quad\left\{\begin{aligned}
\vec{\mathcal{H}} &= m_+^2\int \vec{\mathcal{H}}_0(a)\varphi_{m+}(\vec{r}-\vec{r}_a)\,d\tau_a \\
&\quad + (m_+^2 - m_-^2)\int \overrightarrow{\mathrm{grad}}_b\varphi_{m+}(\vec{r}-\vec{r}_b)\left[\int \vec{\mathcal{H}}_0(a).\overrightarrow{\mathrm{grad}}_a\varphi_{m}(\vec{r}_b-\vec{r}_a)\,d\tau_a\right]d\tau_b,\\
\mathcal{V} &= \int \mathcal{V}_0(a)\varphi_{m+}(\vec{r}-\vec{r}_a)\,d\tau_a,\\
\vec{\mathcal{S}} &= \int \vec{\mathcal{S}}_0(a)\varphi_m(\vec{r}-\vec{r}_a)\,d\tau_a\\
&\quad + \left(1-\frac{M_-^2}{m_-^2}\right)\int \overrightarrow{\mathrm{grad}}_b\varphi_{m-}(\vec{r}-\vec{r}_b)\left[\vec{\mathcal{S}}_0(a).\overrightarrow{\mathrm{grad}}_a\varphi_{M-}(\vec{r}_b-\vec{r}_a)\,d\tau_a\right]d\tau_b,\\
I &= \int I_0(a)\varphi_{M+}(\vec{r}-\vec{r}_a)\,d\tau_a;
\end{aligned}\right.$$

et quatre relations analogues. Dans (5), il a été tenu compte du fait que

$$\vec{\mathcal{E}}_0 = \vec{\mathcal{V}}_0 = \mathcal{S}_0 = J_0 = 0;$$

la fonction $\varphi_m(\vec{r}-\vec{r}_a)$ est prise égale à $e^{-m|\vec{r}-\vec{r}_a|}/|\vec{r}-\vec{r}_a|$.

Dans les conditions statiques, l'hamiltonien se réduit à

$$(6)\qquad H = \frac{\varepsilon}{2}\int\left(\vec{\mathcal{H}}.\vec{\mathcal{H}}_0 + \vec{\mathcal{S}}.\vec{\mathcal{S}}_0 + \mathcal{V}.\mathcal{V}_0 + \frac{1}{m_+^2}I.I_0\right)d\tau.$$

De (5) et de (6), on peut, par un passage à la limite, déduire l'énergie d'interaction d'un système de nucléons, supposés ponctuels.

On obtient

$$\begin{aligned}
(7)\qquad H = \varepsilon\sum_{\substack{i,j\\h,k}} & g_S^2\left[\vec{\sigma}_k.\vec{\sigma}_h\varphi_{m-}(\vec{r}_k-\vec{r}_h) - \left(1-\frac{M_-^2}{m_-^2}\right)\varphi_{ij}^{m-M}(\vec{r}_k-\vec{r}_h)(\vec{\sigma}_k)_i(\vec{\sigma}_h)_j\right]\\
&+ g^2\left[\vec{\sigma}_k.\vec{\sigma}_h\varphi_{m+}(\vec{r}_k-\vec{r}_h) - \left(1-\frac{m_-^2}{m_+^2}\right)\varphi_{ij}^{m+m-}(\vec{r}_k-\vec{r}_h)(\vec{\sigma}_k)_i(\vec{\sigma}_h)_j\right]\\
&+ g_I^2\varphi_{M+}(\vec{r}_k-\vec{r}_h) + g_v^2\varphi_{m+}(\vec{r}_k-\vec{r}_h).
\end{aligned}$$

La sommation (7) doit être faite pour $k\neq h$, i et j sont les indices des coordonnées d'espace, les $\vec{\sigma}$ sont les spins des nucléons, les g_S, g, g_I, g_v quatre constantes.

Les fonctions φ_{ij}^{mM} sont définies par

$$(8)\qquad \varphi_{ij}^{mM}(\vec{r}-\vec{r}_a) = \int\left(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\varphi_m(\vec{r}-\vec{r}_b)\right)_i\left(\overrightarrow{\mathrm{grad}}_a\varphi_M(\vec{r}_b-\vec{r}_a)\right)_j d\tau_b.$$

On peut aisément voir que les φ_{ij}^{mM} se comportent comme les φ_m quand $\vec{r}-\vec{r}_a$ tend vers zéro ou l'infini. En particulier, pour $(\vec{r}-\vec{r}_a)\to 0$, elles ont une partie principale de la forme $C_0/|\vec{r}-\vec{r}_a|$ ($C_0 = \text{const.}$).

L'expression (7) de H montre que l'énergie d'interaction dépend à la fois des positions et des spins. Cependant l'énergie dépendant des spins ne croît pas plus vite que celle dépendant de la seule distance, quand les $\vec{r}_k - \vec{r}_h$ tendent vers zéro.

ASTRONOMIE. — *Sur la définition des dimensions des nébuleuses extra-galactiques.* Note (*) de M. **Gérard de Vaucouleurs**, présentée par M. Bernard Lyot.

1. Le problème de la définition des dimensions des nébuleuses extra-galactiques n'a pas été résolu jusqu'à maintenant de façon satisfaisante. Il est bien connu que les données figurant dans les catalogues n'ont qu'une valeur d'ordre de grandeur et dépendent essentiellement de l'instrument employé, du temps de pose, du type de plaques, etc.

La difficulté du problème résulte des caractères fondamentaux de la structure des nébuleuses, aussi bien spirales qu'elliptiques :

1° D'une part la brillance des régions nucléaires est très élevée et décroît très rapidement à partir d'un noyau central le plus souvent si condensé qu'il dépasse le pouvoir séparateur photographique des plus grands instruments; dans ces conditions la brillance centrale observée est essentiellement conditionnée par le pouvoir de résolution photographique de l'instrument;

2° d'autre part la brillance des régions périphériques qui est très faible et bien inférieure à celle du ciel nocturne, décroît aussi très lentement; de sorte que la nébuleuse vient se perdre sur les photographies dans le voile général dû à la luminosité générale du ciel nocturne, sans qu'il soit possible de lui assigner d'autres limites que celles imposées par le plus petit contraste perceptible dans les conditions de l'observation.

Il résulte de cet état de choses que non seulement les dimensions extrêmes observées n'ont aucune signification, mais qu'il n'est pas possible non plus de définir des dimensions analogues à la demi-largeur ou à la largeur équivalente d'une raie spectrale, puisque la valeur observée du maximum central est illusoire.

2° L'étude microphotométrique de la distribution de la luminosité dans les images nébulaires permet pourtant de donner une définition de leurs dimensions ayant un sens physique précis et conduisant à des valeurs indépendantes des conditions d'observation.

Soit $B(r, \theta)$ la brillance observée; la luminosité totale est en général

$$L_T = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} B(r, \theta)\, r\, d\theta\, dr. \tag{1}$$

(*) Séance du 19 mai 1948.

Dans le cas plus particulier, mais très fréquent, où la nébuleuse a deux axes de symétrie rectangulaires et en assimilant les isophotes à des ellipses concentriques de demi-axes a, b, on peut écrire simplement

$$(2)\qquad L_T = \pi \sum_0^\infty (a_{i+1} b_{i+1} - a_i b_i) B_{i+\frac{1}{2}} = \pi \sum_0^\infty P_i,$$

$B_{i+1/2}$ étant la brillance moyenne de la couronne elliptique comprise entre les isophotes d'axes a_i, b_i et a_{i+1}, b_{i+1}. Redman [1] a montré comment il est possible, par une courte extrapolation, de tenir compte de la contribution des régions extérieures très faibles, non mesurables, de la nébuleuse; la fraction extrapolée est en général inférieure à 20 % (soit 0,2 mag.).

Mais alors on peut calculer de même la fraction de la luminosité totale comprise à l'intérieur de toute isophote donnée, soit

$$(3)\qquad k_i = L_i : L_T = \sum_0^i P_i : \sum_0^\infty P_i.$$

On peut donc tracer la courbe donnant k_i en fonction de a_i par exemple et lire sur cette courbe la valeur de a correspondant à toute fraction k donnée; en particulier à $k = 0{,}5$ correspondent deux valeurs a_e et b_e des demi-axes. La définition de ces dimensions qu'on peut appeler *effectives*, est analogue à celle de l'écart probable à partir de l'intégrale de probabilité normale; elle offre l'avantage de constituer une caractéristique intrinsèque de la nébuleuse, indépendante, en particulier, du pouvoir de résolution de l'instrument, tant que les deux demi-axes effectifs sont plus grands que le rayon de la zone voisine du noyau fortement perturbé par les aberrations.

Par exemple les axes effectifs de la nébuleuse elliptique de type E 7, NGC 3115 (mag. totale $m = 9{,}7$), déterminés à partir de mesures récemment effectuées à l'aide du télescope de $0^m{,}80$ de Haute Provence, sont $2a_e = 2'9$, $2b_e = 0'9$; alors que les valeurs déduites de même des mesures obtenues par Oort [2] avec le télescope de $1^m{,}52$ du Mont Wilson, sont $2a_e = 3'3$ et $2b_e = 1'1$.

Les valeurs des axes effectifs d'une nébuleuse identique à NGG 3115, mais plus lointaine, déduites des profils photométriques bruts, resteraient significatives avec ces instruments jusque vers $m \sim 13$ à 14; mais il serait possible d'aller un peu plus loin en partant de profils convenablement corrigés de l'influence des aberrations, probablement jusque vers $m \sim 15$ à 16.

3. Mais on peut considérer aussi une autre définition, qui resterait sans doute applicable aux nébuleuses les plus faibles susceptibles d'être reconnues sur les clichés, soit $m \sim 21$ à 22 avec les plus grands instruments. Cette

(1) MONTLHY, *Not. R. A. S.*, 96, 1936, p, 588.
(2) *Astroph. J.*, 91, 1940, p. 285.

définition est celle des dimensions *totales* et en particulier du diamètre total (maximum) de la nébuleuse, correspondant à $k=1$.

Cette extrapolation qui serait hasardeuse sur la courbe $k=f(a)$, devient beaucoup plus sûre après un changement de variable convenable, transformant la courbe initiale en une droite dans un intervalle aussi étendu que possible. L'expérience montre que ce résultat peut généralement être atteint avec une grande précision en portant en abscisses $\log(a+\alpha)$, α étant une constante convenablement choisie.

Dans le cas précité, tout l'intervalle non perturbé par les aberrations de la courbe de luminosité intégrée, soit de $a=20''$ à $a=200''$ $(0,2<k<0,8)$, est transformé en une droite en prenant $\alpha=70''$ et une extrapolation relativement courte donne alors $2a_t=12'2$ (et $2b_t\sim 6'$). Les mesures de Oort (*loc. cit.*) traitées de même, avec $\alpha=50''$, donnent $2a_t=14'3$ (et $2b_t\sim 7'$). Pour comparaison, les dimensions de la même nébuleuse figurant dans le *Shapley-Ames Catalogue* ([3]), sont $4'0$ et $1'0$.

ASTROPHYSIQUE. — *Influences planétaires sur les taches solaires.* Note (*) de MM. **František Link** et **Miloslav Kopecky**, présentée par M. Bernard Lyot.

Ce problème quasi astrologique fut toutefois l'objet de recherches des astronomes et physiciens tels que De la Rue, Balfour Stewart, Loevy, Maunder, Schuster et Stratton pour ne citer que les plus importants. Nous nous sommes proposé d'étudier spécialement l'influence des planètes lors de leurs conjonctions avec le Soleil, comme l'a fait Sanford ([1]). En considérant 10 conjonctions supérieures et 10 conjonctions inférieures de Vénus, il trouve que le nombre de Wolf est environ de 75 % plus grand pendant les premières que pendant les dernières. Comme ce résultat tout à fait inattendu peut être dû au hasard, nous avons examiné systématiquement un grand nombre de conjonctions de Mercure et de Vénus, de conjonctions et d'oppositions de Jupiter dont les actions perturbatrices, d'après la force des marées, sont du même ordre que celles de la Terre et considérablement plus grandes que les actions d'autres planètes.

Dans le tableau ci-contre, nous mettons en évidence les différences moyennes du nombre de Wolf dans le sens : conjonction supérieure-conjonction inférieure ou conjonction-opposition, en fonction de la phase de l'activité solaire.

([3]) *Ann. Ast. Obs. Harvard College*, 88, part. II, 1932.

(*) Séance du 19 mai 1948.

([1]) F. Sanford, *Smiths. Misc. Coll.*, 95, n° 11, 1936.

Phase.	Mercure (1866-1938). Per.	Moy.	Aphel.	Tot.		Vénus et Jupiter (1866-1938). Vénus Tot.		Jupiter Tot.	
0 min.....	+ 4,1	− 9,4	− 2,2	− 1,8	22	− 8,5	6	− 7,0	7
1.........	−10,9	−10,2	− 2,3	− 8,3	22	+ 8,5	3	−18,8	6
2.........	+24,3	+46,8	+17,9	+27,2	22	+ 21,3	4	+44,5	7
3 } max ...	+20,1	+ 1,3	− 4,0	+ 7,1	21	+ 64,0	4	−36,5	7
4 } max ...	+15,4	+17,3	−33,6	+ 0,5	22	+ 29,5	6	+22,5	5
5.........	−11,9	+ 5,9	+ 0,8	− 3,6	19	+114,0	3	−15,6	6
6.........	+ 4,0	+11,1	−22,9	− 1,8	19	+ 9,1	4	−16,2	5
7.........	− 5,0	−11,0	+39,1	+ 7,5	19	+ 1,5	4	− 3,2	6
8.........	−11,2	− 4,2	+ 3,0	− 5,1	19	− 4,2	4	+ 1,5	6
9.........	− 4,2	− 3,2	+ 2,0	− 2,0	19	+ 6,5	3	− 1,3	6
10.........	+ 4,7	+ 4,5	− 8,3	+ 2,5	15	+ 9,7	3	− 6,2	3
					219		44		64

Les chiffres sans signe dans la colonne Tot. indiquent le nombre des différences entrant dans la formation de la moyenne.

L'examen de ce tableau fait ressortir la prépondérance des différences positives au voisinage du maximum de taches. L'effet est surtout marqué pour Vénus et Mercure au périhélie et aux distances moyennes. Dans les autres cas, il y a une indication dans le même sens. En somme, l'effet annoncé par Sanford semble être présent dans notre matériel d'observation qui est beaucoup plus étendu que celui de Sanford. Dans la moyenne, sur tout le cycle solaire, l'effet devient moins marqué ou disparaît presque complètement. En effet, on trouve les différences suivantes : Mercure +1,3; Vénus +13,9; Jupiter +0,5. C'est peut-être la raison d'insuccès assez fréquents dans ce domaine de recherches.

Il serait difficile d'admettre que l'effet observé par nous est dû au hasard puisqu'il se manifeste dans les trois cas et que, pour Mercure, il semble être fonction de la distance. Tout se passe comme si les planètes avaient une influence défavorable sur les taches, une influence dont fut aussi accusée la Terre. Dans ce dernier cas, on a cru trouver des explications géométriques qui ne s'appliquent pas pour les planètes.

Mais, d'autre part, il ne faut pas conclure trop hâtivement à l'existence d'une réelle influence. Le groupement des conjonctions peut se produire d'une façon systématique par rapport à la courbe des taches et peut donner ainsi naissances à des différences systématiques qui ne seraient qu'apparentes. Jupiter nous fournit un exemple de ce genre. En formant le nombre moyen de Wolf en fonction de la distance, on trouve les chiffres suivants :

Distances U. A.	Nombre de taches ☌.	☍.	Phase moyenne ☌.	☍.
4,96-5,10.....	59,5	60,0	2,5	2,0
5,11-5,29.....	45,6	42,4	4,9	6,5
5,30-5,46.....	27,8	28,3	6,8	7,0

Il y a donc une relation marquée entre la distance et le nombre de taches. Cette relation apparaît sous une autre lumière, si l'on considère la phase moyenne de l'activité solaire pour chaque groupe. En réalité, il s'agit ici d'une relation dont l'argument est la phase dans le cycle solaire et non la distance, mais cette explication ne convient pas aux chiffres du premier tableau, sauf d'une façon secondaire, car l'effet de phase y est éliminé par le mode de groupement.

En résumé, on peut dire que, dans la période 1866-1938, le nombre de Wolf a été systématiquement plus grand pendant les conjonctions supérieures que pendant les conjonctions inférieures de Vénus, Mercure et Jupiter, dans l'ordre décroissant de la grandeur de l'effet. Dans l'état actuel du problème il serait prématuré de conclure définitivement à la signification physique du phénomène comme il serait contraire à l'esprit scientifique de ne pas le signaler et en chercher l'explication.

ASTROPHYSIQUE. — *Sur la vitesse radiale de ζ Persei.*

Note (*) de M. **Roger Bouigue**, présentée par M. Bernard Lyot.

La valeur de la vitesse radiale de ζ Persei donnée par l'observatoire de Lick (1), soit $+20,9 \pm 0,4$, résulte de mesures faites successivement à Lick (2), Yerkes (3) et Ottawa (4).

Bien que les raies soient diffuses, les écarts constatés entre certaines valeurs nous ont amené à faire de nouvelles mesures. Nous avons étudié 15 spectrogrammes pris par MM. Lacroute, Babaud et Dirks à l'observatoire de Toulouse, avec le spectrographe à fente, ouvert à F/6, conçu par M. Lacroute pour être monté en Newton sur le Télescope de 83^{cm}. (Une description détaillée sera faite ultérieurement.) La dispersion moyenne utilisée dans ces clichés est de 14 Å/mm :

Clichés 312 à 314, de 3600 à 4300 Å.

Autres clichés, de 4000 à 5000 Å.

Nous n'avons mesuré que les raies les meilleures, choisies parmi celles dont le λ est bien connu (6 raies en moyenne par cliché) et nous avons réduit les spectrogrammes suivant le procédé utilisé à Yerkes (3). Les résultats, consignés dans le tableau ci-contre, tendent à confirmer le fait que les écarts constatés ne sont pas uniquement dus à l'imprécision des mesures.

(*) Séance du 31 mai 1948.

(1) *Publ. Lick Obs.*, **18**, 1932, p. 29 (Catalogue de Moore).

(2) *Publ. Lick Obs.*, **16**, 1928, p. 49.

(3) *Publ. Yerkes Obs.*, **2**, 1903, p. 49-52 et p. 8.

(4) *Publ. Dom. Obs. Ottawa*, 5, n° 1, 1920, p. 16-18.

N° du cliché.	Époque.	Vitesse radiale.	Erreur probable.	$\rho_0 - \rho_c$.
290.......	2430673,965	+21,9	±1,1	−1,3
293.......	674,929	21,2	2,4	+0,6
295.......	688,876	21,9	1,5	−3,5
296.......	689,846	23,9	1,3	+5,2
297.......	690,855	26,4	0,6	−1,3
300.......	696,855	29,0	2,2	+2,6
302.......	700,841	25,6	0,8	+4,7
303.......	700,899	23,5	3,2	+3,7
304.......	700,990	21,1	1,8	+2,7
307.......	703,872	24,8	2,7	−3,5
312.......	764,846	28,7	1,8	+3,1
313.......	772,828	25,9	2,0	−0,2
314.......	774,835	22,1	1,4	−1,0
317.......	776,839	20,3	1,4	+0,2
318.......	778,869	17,0	2,2	−0,3

L'examen des valeurs obtenues à Ottawa et à Toulouse (clichés rapprochés) conduit à une période de rotation *inférieure à deux jours*. Dans ces conditions, on peut préciser cette période en procédant par approximations successives [5] et au moyen des hypothèses *provisoires* suivantes, certainement très proches de la réalité : mouvement réel circulaire (étoile B_1 et courte période), vitesse radiale du système +22,4 (moyenne des valeurs observées), demi-amplitude de la vitesse radiale 6,6 (justifiée par les valeurs maxima trouvées). On a $P = 1^j,8526$.

A partir de ces valeurs et des résultats de Yerkes, Lick et Toulouse, nous avons déterminé, en *première approximation*, les éléments de l'orbite :

$$P = 1^j{,}8526, \qquad \omega = 296^\circ{,}5;$$
$$K = 6{,}6\ \text{km/s}, \qquad \gamma = +\,22{,}2\ \text{km/s};$$
$$e = 0{,}052, \qquad T = 2415640{,}543;$$
$$a \sin i = 307\,000\ \text{km}.$$

En résumé, la variation de la vitesse radiale de ζ Persei est établie et la détermination des éléments de son orbite, en *deuxième approximation*, nécessite une série de clichés rapprochés; il semble, enfin, qu'une étude de la structure de quelques raies soit souhaitable.

---

(5) Dans ce calcul et les suivants, nous avons systématiquement écarté les valeurs d'Ottawa qui nous ont semblé assez peu précises (dispersion faible du spectrographe et valeurs de 1920-22 corrigées par Lick de + 9,4 en moyenne).

PHYSIQUE MATHÉMATIQUE. — *Sur une équation intégrale régissant le phénomène de la diffusion des neutrons.* Note (*) de M. **Mircea Drăganu**.

L'équation intégro-différentielle de O. Halpern, R. Lueneburg et O. Clark ([1]), qui décrit le phénomène de la diffusion des neutrons dans les plaques matérielles, peut être remplacée, dans le cas des chocs élastiques, isotropes et à symétrie sphérique, par une équation intégrale de Fredholm, la fonction inconnue étant cette fois la densité des neutrons. Cette équation s'écrit de la manière suivante :

$$\rho(x) = K_1\big(|a-x|, g(\eta)\big) + K_1\big(|x-b)|, h(\eta)\big) + \int_a^b d\xi\, q(\xi)\, K_0\big(|\xi-x|\big) + \frac{\sigma}{2}\int_a^b d\xi\, \rho(\xi)\, K_0\big(|\xi-x|\big), \tag{1}$$

où $q(\xi)$ est la densité des sources des neutrons à l'intérieur de la substance diffusante, σ une constante ≤ 1, $g(\eta)$ la distribution incidente des neutrons sur le plan $x=a$, $h(\eta)$ de même la distribution sur le plan $x=b$ des neutrons réfléchis; on a employé, en outre, les notations

$$K_n(|\xi - x|) = \int_1^\infty \frac{d\eta}{\eta^{n+1}} e^{-|\xi-x|\eta}, \qquad K_n\big(|\xi-x|, f(\eta)\big) = \int_1^\infty \frac{d\eta}{\eta^{n-1}} e^{-|\xi-x|\eta} f(\eta). \tag{2}$$

L'équation intégrale (1) déduite par nous, analogue à l'équation de K. Schwartzschild de la théorie des atmosphères stellaires, possède une solution non nulle, ce qui revient, comme l'on sait, à démontrer que le paramètre $\sigma/2$ n'est pas une valeur caractéristique de l'équation intégrale homogène. Mais les théorèmes de Fredholm ne peuvent être appliqués directement à l'équation (1), son noyau étant singulier et, de plus, sa trace devenant infinie. Or le noyau de notre équation intégrale diverge vers l'infini comme un logarithme; on peut trouver alors une solution par l'intermédiaire de l'équation une fois itérée, et cette solution s'écrit de la manière suivante ([2]) :

$$\rho(x) = F(x) + \frac{\sigma}{2}\int_a^b \Gamma\left(x, \xi; \frac{\sigma}{2}\right) F(\xi)\, d\xi, \tag{3}$$

où $F(x)$ est une fonction connue et $\Gamma(x, \xi; \sigma/2)$ la résolvante représentée par la fonction méromorphe

$$\Gamma\left(x, y; \frac{\sigma}{2}\right) = K_0(|x-y|) + \frac{\sigma}{2}\,\frac{D_2\left(x, y; \frac{\sigma^2}{4}\right)}{D_2\left(\frac{\sigma^2}{4}\right)} + \frac{\sigma^2}{4}\int_a^b K_0(|x-\xi|)\,\frac{D_2\left(\xi, y; \frac{\sigma^2}{4}\right)}{D_2\left(\frac{\sigma^2}{4}\right)}\, d\xi, \tag{4}$$

(*) Séance du 3 mai 1948.

([1]) *Phys. Rev.*, 53, 1938, p. 173.

([2]) E. Goursat, *Cours d'Analyse mathématique*, III, p. 382.

$D_2(\sigma^2/4)$, $D_2(x, y; \sigma^2/4)$ signifient les fonctions de Fredholm pour le noyau une fois itéré.

On peut remplacer de même dans le cas de la diffusion sans symétrie sphérique l'équation intégro-différentielle de O. Halpern, R. Lueneburg et O. Clark par un système de deux équations intégrales de Fredholm, qu'on réduit afin de résoudre le problème à une seule équation par une méthode connue.

Si nous traitons par la même méthode le cas de la diffusion anisotrope, considéré par N. Arley et M. Ageno (3), on arrive, d'une manière analogue, à un système de deux équations intégrales de Fredholm.

THERMODYNAMIQUE. — *Sur les échangeurs de chaleur à gaz parfait.* Note de M. **Jean Villey**, présentée par M. Gustave Ribaud.

L'étude des échangeurs de chaleur pose le problème suivant : évaluer la quantité de chaleur Q reçue (algébriquement) par chaque unité de masse d'un courant gazeux permanent rapide dont la température passe de T_1 à T_2. Cela revient à évaluer la chaleur spécifique $\mathcal{C}$ de ce gaz au cours de l'évolution liée à son écoulement, pour écrire $Q = \int_{T_1}^{T_2} \mathcal{C}.dT$, ou $Q = \mathcal{C}'(T_2 - T_1)$, en introduisant la chaleur spécifique moyenne $\mathcal{C}'$.

Dans le cas d'un gaz parfait, il suffira encore d'utiliser les équations aux différentielles logarithmiques dont nous avons déjà montré de nombreuses applications, et qui ont été reproduites dans la plus récente des notes indiquées en référence (1).

L'équation relative à la température est

$$\frac{dT}{T} = \xi \frac{\gamma - 1}{1 - \xi} \left[\frac{ds}{s} + (1 - \xi\gamma) \frac{\delta q}{u^2} - \xi\gamma \frac{\delta w}{u^2} \right].$$

Nous envisagerons un échangeur à canalisations cylindriques ($ds = 0$), et nous caractériserons les frottements par le rapport k de l'énergie décoordonnée à la chaleur reçue, soit $\delta w = k\,\delta q$.

Il vient alors

$$\frac{dT}{T} = \xi \frac{\gamma - 1}{1 - \xi} \frac{\delta q}{u^2} (1 - \xi\gamma - k\xi\gamma).$$

Mais $\xi = u^2/a^2$, donne

$$\frac{\xi}{u^2} = \frac{1}{a^2} = \frac{1}{\gamma RT},$$

(3) *Phys. Rev.*, **69**, 1946, p. 241.

(1) *Comptes rendus*, **201**, 1935, p. 1417; **214**, 1942, p. 427 et 900; **224**, 1946, p. 27 et 329; **226**, 1948, p. 1426; *Journ. de Phys.*, avril 1942, sept. 1942, avril 1947.

d'où

$$dT = \frac{\gamma - 1}{\gamma R}\,\delta q\,\frac{1 - \xi\gamma - k\xi\gamma}{1 - \xi},$$

d'où la chaleur spécifique

$$\mathcal{C} = \frac{\delta q}{dT} = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}\,\frac{1 - \xi}{1 - \xi\gamma - k\xi\gamma} = C\,\frac{1 - \xi}{1 - \xi\gamma(1 + k)}.$$

On retrouve bien à la limite, pour un courant très lent ($\xi = 0$, $k = 0$), la chaleur spécifique C à pression constante.

On observera que k est nécessairement du même signe que δq, puisque δw est essentiellement positif. Donc les chaleurs spécifiques $\mathcal{C}$ sont, pour une valeur donnée de ξ, différentes pour les deux sens opposés d'écoulement thermique : il n'y a pas symétrie entre les variations de température liées à deux échanges de chaleur opposés. Cela correspond au fait que se superposent à ces échanges une variation d'énergie cinétique et la production d'une quantité toujours positive δw d'énergie thermique.

On remarquera que l'on ne peut prévoir ni l'importance, ni même le sens, de l'altération de la chaleur spécifique en assimilant l'énergie décoordonnée δw à un apport supplémentaire de chaleur. En effet, aux vitesses subsoniques, la décoordination δw introduit, dans la variation de température dT, un terme *négatif*. Elle introduit en même temps un terme positif dans la variation d'énergie cinétique $d(u^2/2) = u\,du$. Ce double résultat n'est paradoxal qu'en apparence, car δw introduit d'autre part un terme négatif dans la variation de pression dp.

Le signe négatif du terme en δw dans l'expression de dT correspond au résultat connu du refroidissement progressif le long d'un écoulement cylindrique adiabatique ($ds = \delta q = 0$). Ce refroidissement n'est pas *produit* par la décoordination δw; mais il est *accompagné* par elle. Le gradient négatif de pression produit de l'énergie cinétique, dont une partie se décoordonne; il provoque en même temps, par détente avec travail extérieur, un refroidissement qui l'emporte sur l'apport d'énergie interne par décoordination.

Le tableau ci-dessous donne, pour diverses valeurs de $\xi = (u^2/a^2)$, les altérations relatives $(\mathcal{C}/C) = (1 - \xi)/[1 - \xi\gamma(1 + k)]$ de la chaleur spécifique, pour $k = 0{,}25$ et $k = -0{,}25$, c'est-à-dire pour une énergie décoordonnée égale au quart de la chaleur fournie, ou enlevée, au courant gazeux.

ξ	$\frac{1}{900}$.	$\frac{1}{100}$.	$\frac{1}{36}$.	$\frac{1}{25}$.	$\frac{1}{16}$.	$\frac{1}{9}$.	$\frac{1}{4}$.
($k = +0{,}25$)......	1,0008	1,0076	1,0219	1,0322	1,0526	1,1034	1,3333
($k = -0{,}25$)......	1,00005	1,0005	1,0014	1,0021	1,0033	1,0063	1,0169

On voit que, pour *l'un et l'autre sens* des échanges de chaleur, la décoordination s'accompagne d'augmentation de la chaleur spécifique, mais celle-ci est beaucoup plus importante dans le cas où le courant *reçoit* de la chaleur.

L'altération de la chaleur spécifique devient nulle si $\gamma(1+k)=1$ ou $k=(1/\gamma)-1=-[(\gamma-1)/\gamma]=-(1/3,5)$, c'est-à-dire dans le cas où le courant cède de la chaleur et où la décoordination est égale à la fraction $1/3,5=0,2857$ de la chaleur enlevée. Si la décoordination devient supérieure à cette fraction 1/3,5 de la chaleur enlevée, l'altération de la chaleur spécifique devient une diminution.

THERMODYNAMIQUE. — *Sur l'analyse thermique et la dilatométrie du sesquioxyde de chrome.* Note de MM. **Jean Jaffray** et **Jacques Viloteau**, présentée par M. Gustave Ribaud.

I. Le sesquioxyde de chrome, Cr_2O_3, revêt des aspects très différents suivant son origine. Préparé par décomposition thermique du bichromate d'ammonium ou par réduction du bichromate de potassium par le soufre, il se présente sous forme d'une poudre verte; on le dit alors amorphe. Obtenu par calcination du bichromate de potassium en présence de chlorure de sodium, il est finement cristallin et de couleur beaucoup plus terne.

D'après Anderson (1), la variété amorphe montre une forte anomalie de chaleur spécifique, avec maximum aigu, vers 32° C.

Les propriétés magnétiques du sesquioxyde de chrome ont été étudiées par de nombreux physiciens (2) qui s'accordent à reconnaître que la susceptibilité magnétique passe par un maximum étalé à une certaine température; mais cette température varie beaucoup d'un auteur à l'autre : elle est inférieure à 40° C. pour Honda et Sone, égale à 50° C. pour Foex et Mlle Graff et à 60° C. pour Théodoridès. Cette diversité de résultats est-elle due au fait que les propriétés physiques de ce corps sont variables d'un échantillon à l'autre? Pour répondre à cette question, nous avons étudié l'anomalie de chaleur spécifique de trois échantillons préparés différemment (deux échantillons amorphes et un cristallisé) en opérant par analyse thermique différentielle; puis nous avons fait la dilatométrie de ces substances dans la région de l'anomalie, ce qui nous a permis de préciser la température de transition et la nature de la transformation.

II. Pour chacune des variétés, amorphes ou cristallisées, l'analyse thermique différentielle, réalisée par la méthode du bloc de cuivre, entre — 60 et 80°C., n'a révélé qu'une seule anomalie de chaleur spécifique, comportant un maximum important. Les températures trouvées pour ce maximum s'échelonnent entre 31°,5 et 33°,5, sans qu'il y ait de différences systématiques entre les trois

---

(1) *Journ. Amer. Chem. Soc.*, 59, 1937, p. 488.

(2) Honda et Sone, *Sc. Rep. Tohoku Imp. Uni.*, 3, 1914, p. 223; Théodoridès, *Journ. de Phys.*, 6e série, 3, 1922, p. 1; Foex et Mlle Graff, *Comptes rendus*, 209, 1939, p. 161.

échantillons, la dispersion des résultats semblant due uniquement à l'imprécision de la méthode et aux valeurs différentes des vitesses d'échauffement. Il semble donc que les différentes variétés de sesquioxyde de chrome manifestent une anomalie de chaleur spécifique à des températures très voisines, sinon égales. Il n'est pas possible de conclure des expériences précédentes si l'anomalie de chaleur spécifique comporte une variation rapide ou une chute verticale après le maximum.

III. La dilatométrie des trois échantillons, effectuée dans le toluène, un peu au-dessous et un peu au delà de 32°C., par températures croissantes ou décroissantes, a prouvé la parfaite continuité du volume spécifique. Mais la courbe volume spécifique-température présente un coude très net à $32,8 \pm 0°,1$ C., (moyenne de six expériences sur les échantillons amorphes et de trois expériences sur l'échantillon cristallisé). Là encore, on ne trouve pas de différences systématiques entre les trois échantillons. Il y a donc à 32°,8C. une anomalie de dilatation du sesquioxyde de chrome qui consiste en un maximum aigu du coefficient de dilatation cubique β, suivi d'une chute très rapide, peut-être une discontinuité. Pour la valeur du maximum de β, on a trouvé des nombres compris entre 42 et 50.10^{-5}. Après la chute rapide, β est voisin de 12.10^{-5}. Pas plus qu'Anderson dans ses mesures de chaleur spécifique, nous n'avons trouvé, dans la dilatation, d'hystérèse thermique notable.

En résumé, nous n'avons pas trouvé de différences notables entre les températures de transition d'échantillons amorphes ou cristallisés de sesquioxyde de chrome. La température de transition, 32°,8, diffère notablement de celles pour lesquelles on a trouvé un maximum de la susceptibilité magnétique. Enfin, cette transition semble être du deuxième ordre.

CALORIMÉTRIE. — *Nouveau microcalorimètre différentiel et à compensation.* Note (*) de M. **Édouard Calvet**, présentée par M. Gabriel Bertrand.

Nous avons pu réaliser un nouvel appareil calorimétrique particulièrement intéressant pour l'étude des phénomènes lents. Sa durée d'expérimentation est quasi illimitée; il peut fonctionner à toutes températures et peut être placé dans une salle non isotherme; sa sensibilité et sa fidélité sont très grandes.

Causes des variations du zéro expérimental *des microcalorimètres.* — Une longue expérience de l'emploi de l'appareil très remarquable de A. Tian (microcalorimètre à compensation par effets Peltier et Joule) nous a montré que les principales causes des variations du *zéro expérimental* sont les suivantes :

1° Les variations de la température de l'enceinte thermostatique du calorimètre (sol d'une cave) n'affectent la cellule qu'avec un certain retard variable

(*) Séance du 10 mai 1948.

avec la vitesse de ces variations. C'est une cause de décalage variable du *zéro expérimental* (circuit fermé) par rapport au *zéro absolu* (circuit ouvert);

2° Cette première cause n'est pas la plus importante. Il faut tenir compte des effets Thomson qui apparaissent entre les différentes portions du circuit dont la température n'est pas uniforme. En effet, le calorimètre est placé dans

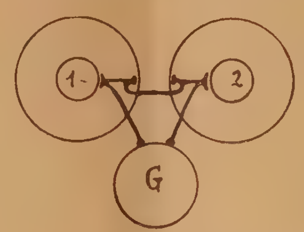


Fig 1.

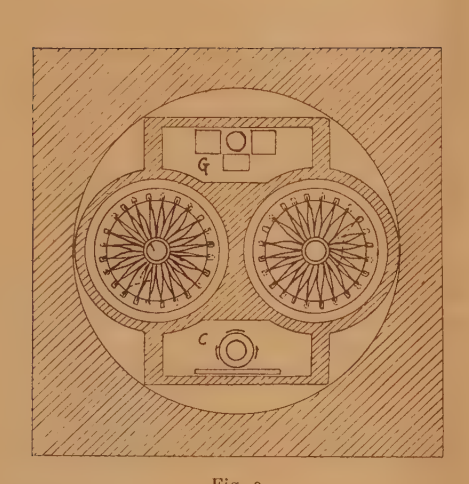


Fig. 2.

Fig. 3.

La figure 1 montre la disposition schématique des deux calorimètres avec leur circuit thermoélectrique en opposition reliés au galvanomètre G. La figure 2 est une coupe horizontale montrant la forme du bloc de cuivre dans lequel se trouvent les deux calorimètres, le commutateur C permettant l'utilisation de deux sensibilités et la compensation Peltier. La figure 3 est une coupe verticale montrant notamment la disposition des cellules. Le thermostat enveloppant le tout n'est pas figuré.

le sol alors que le galvanomètre et les commutateurs sont disposés à l'extérieur. Les variations de la température extérieure affectent particulièrement ces derniers appareils produisant de notables variations du zéro expérimental; le tracé des courbes enregistrées devient sinueux (on enregistre notamment des variations de la pression barométrique). Il n'est guère possible de suivre fidèlement une expérience pendant plus d'un jour.

Principe du nouvel appareil. — Pour réaliser un appareil à couples thermoélectriques donnant des indications indépendantes des variations de la tempé-

rature extérieure, nous avons associé *deux calorimètres identiques* en disposant leurs thermocouples en opposition. Ces deux calorimètres, ainsi que le galvanomètre et le commutateur (au résumé, tout le circuit dans lequel passent les courants thermoélectriques), se trouvent placés au sein d'un gros bloc de cuivre de forme convenable. Celui-ci est lui-même disposé dans un thermostat dont on peut faire varier la température à volonté.

Le thermostat n'a pas besoin d'être très finement réglé; il n'est destiné qu'à fixer la température de l'expérience. En effet, la température est homogène à l'intérieur de la masse de cuivre du fait de la bonne conductibilité thermique de ce métal. Les variations de la température au cours du temps affectent de la même façon les deux calorimètres. Il se produit des courants de signes contraires dans le circuit du galvanomètre qui s'annulent si l'identité des deux calorimètres est réalisée. Le galvanomètre n'enregistre que les *différences de température entre les deux cellules;* l'appareil est donc un système différentiel. Il ne peut se produire d'effets Thomson entre les différentes portions du circuit, puisque celui-ci est noyé tout entier dans le bloc de cuivre dont la température est uniforme à chaque instant.

Nous avons conservé la compensation par effet Peltier qui permet une évaluation aisée des quantités de chaleur produites et dont l'emploi est particulièrement commode pour refroidir une cellule de manière à ramener l'appareil au zéro expérimental.

La fidélité de l'appareil étant assurée, nous avons cherché à augmenter la sensibilité en augmentant judicieusement le nombre de couples détecteurs (192 couples fer-constantan par cellule). L'appareil équipé avec un galvanomètre Zernicke donne une déviation de 1^{mm} sur une échelle placée à 1^{m} pour un débit thermique de un millième de calorie/heure.

Les déviations du galvanomètre sont enregistrées photographiquement par l'intermédiaire d'un dispositif périscopique qui permet d'atteindre le miroir du galvanomètre au sein du bloc de cuivre.

A titre d'exemple nous signalons que nous réalisons couramment des enregistrements de thermogenèse bactérienne d'une durée de 10 à 15 jours avec un retour parfait au zéro initial en fin d'expérience.

ÉLECTRICITÉ. — *Influence d'une élévation de température sur la conductibilité-limite de l'acétone*. Note de M. **J.-Louis Eck**, présentée par M. Aimé Cotton.

La conductibilité-limite de l'acétone, mesurée après passage du courant pendant plusieurs jours, est souvent brusquement accrue par une élévation de température de quelques degrés. Il arrive que l'accroissement relatif dépasse 50 % et même 100 % lorsque la température s'élève de deux degrés. Les caractéristiques essentielles de cet effet sont les suivantes :

1° Il se manifeste quelle que soit la portion de liquide que l'on chauffe, mais il est particulièrement intense au voisinage des électrodes.

2° L'intensité du courant ne croît pas constamment avec la température. Elle augmente d'abord très vite, passe par un maximum, puis décroît, même si l'on continue à chauffer. C'est ainsi que j'ai obtenu les résultats suivants sur un tube long de 20^{cm}, chauffé dans toute son étendue :

Temps (min).	Température (°C.).	Intensité (Amp).	Temps (min).	Température (°C.).	Intensité (Amp).
0	13	$5,6.10^{-7}$	3	15,8	$14,6.10^{-7}$
1	14	11,7	7	17	11,7
2	15	15,3			

Au bout de quelques dizaines de minutes, l'intensité vient reprendre une valeur très voisine de sa valeur initiale et à peu près indépendante de la température.

3° L'effet est plus notable avec un liquide fraîchement distillé que sur un échantillon ancien. Il est d'autant plus difficile à observer que l'acétone a été soumis plus longtemps à un champ intense avant l'expérience.

4° Pour un tube déterminé, chauffé toujours de la même façon, l'accroissement relatif du courant dépend essentiellement du champ appliqué. Il est nul pour des champs très faibles, ainsi que pour ceux qui dépassent une centaine de volts par centimètre. Il passe par un maximum pour une valeur du champ qui dépend de la longueur de la colonne liquide, environ 25 volts par centimètre pour un tube de 3^{cm} de long, et seulement 15 volts si le tube a une vingtaine de centimètres.

Pour expliquer ce phénomène, on peut admettre avec M. G. Reboul que le liquide semi-conducteur est le siège de conglomérats de molécules qui se polarisent et s'orientent sous l'influence du champ. Si celui-ci devient assez intense, les dipôles ainsi formés s'allongent et sont susceptibles de se scinder en deux gros ions sous l'influence d'une légère augmentation de température. La probabilité de rupture est maxima pour un champ déterminé. Quand celui-ci dépasse une certaine valeur, son action suffit à rompre tous les dipôles. L'élévation de température est alors sans effet appréciable, son seul rôle étant d'accroître légèrement la mobilité des ions. Si le champ est trop faible, l'accroissement d'agitation thermique dû à une légère élévation de température est insuffisant pour provoquer la rupture.

Lorsqu'on se trouve dans des conditions de champ convenables, une élévation de température doit donc s'accompagner de l'apparition d'ions des deux signes. C'est ce que l'on vérifie effectivement lorsque l'on suit les variations de l'intensité du courant après chauffage d'une portion du tube voisine des électrodes.

On constate en effet que l'intensité du courant diminue d'abord rapidement, et revient sensiblement à sa valeur initiale. Puis, au bout d'un temps qui dépend du champ appliqué et de la longueur de la colonne liquide, le courant

se remet à croître et passe par un second maximum moins accentué que le premier. Ce fait se produit quelle que soit l'électrode chauffée et quelle que soit sa position, ce qui élimine l'hypothèse d'un courant de convection. On peut donc en déduire que le chauffage a pour effet de produire des ions des deux signes. Ceux qui sont de signe opposé à celui de l'électrode voisine sont immédiatement captés par celle-ci. Ces ions doivent d'ailleurs être en nombre limité, puisque l'accroissement du courant ne dépend pratiquement pas de la valeur de l'élévation de température. Les ions de signe contraire sont entraînés par le champ, et le second maximum correspond à leur arrivée sur l'autre électrode. Connaissant le champ appliqué, la longueur de la cuve, et le temps nécessaire pour atteindre ce second maximum, il est possible d'évaluer la mobilité des ions. On trouve ainsi des nombres généralement compris entre 1,5 et 3 microns-seconde par volt-centimètre pour les ions des deux signes, en accord avec les résultats obtenus par d'autres méthodes ([1]). Le second maximum étant assez étalé, il est probable que les ions possèdent des mobilités différentes, groupées autour d'une valeur moyenne, ce qui proviendrait de la rupture de conglomérats formés d'un nombre variable de molécules.

MAGNÉTISME. — *Sur une méthode d'étude de la texture magnétique.* Note ([*]) de MM. **Paul Abadie** et **Israël Epelboim**, présentée par M. Aimé Cotton.

L'étude de la texture magnétique, c'est-à-dire de l'orientation des spins d'un échantillon ferromagnétique, suivant certaines directions privilégiées, peut s'effectuer actuellement par la méthode des spectres magnétiques, qui traduisent le comportement d'un ferromagnétique dans les champs alternatifs. En effet, l'emploi conjoint du procédé de mesure de résonance sur ligne haute fréquence ([1]) et de celui des bobines démontables ([2]) nous permet de relever ces spectres sur un même échantillon dans l'ensemble de l'échelle des ondes hertziennes. Le but de cette Note est de donner un aperçu des résultats que nous avons déjà acquis par cette méthode dans l'étude des matériaux ferromagnétiques en poudre et en ruban.

Les mesures des perméabilités effectives initiales de poudres ferromagnétiques d'origines très diverses, mais toujours fines et enrobées régulièrement dans du caoutchouc, montrent que les spectres ferromagnétiques ne présentent pas de phénomène de relaxation jusqu'aux longueurs d'onde d'environ 5^m, à condition que le volume du ferromagnétique ne dépasse pas celui du caout-

([1]) G. Reboul et J.-L. Eck, *Comptes rendus*, **220**, 1945, p. 868.

([*]) Séance du 26 avril 1948.

([1]) P. Abadie, *Comptes rendus*, **226**, 1948, p. 474.

([2]) I. Epelboim, *Comptes rendus*, **225**, 1947, p. 535.

chouc. Aux ondes plus courtes, tous les échantillons, quelles que soient leurs charges ferromagnétiques, présentent le phénomène caractéristique de dispersion de la perméabilité conservative μ_1 et d'absorption de la perméabilité consomptive μ_2 déjà discuté par ailleurs ([3]).

A titre d'exemple, nous donnons, pour 10^{cm} de longueur d'onde, les valeurs de $\mu_1 - j\mu_2$, ainsi que celles des constantes diélectriques $\varepsilon_1 - j\varepsilon_2$ de trois échantillons de caoutchouc, chargés, le premier à 34 % de son volume par du fer carbonyle, les deux autres à 6 % de leur volume respectivement par de la poudre de fer divisée mécaniquement et par de la poudre de permalloy recuit. Nous voyons que l'échantillon en fer carbonyle dont la poudre est particulièrement fine présente, par suite de sa charge, une dispersion de la perméabilité conservative et une absorption de la perméabilité consomptive très accentuées. D'ailleurs, aux longueurs d'onde de 3^m, 1^m et $0^m,60$, les valeurs de μ_1 sont déjà 3,5; 3,1; 2,6 et celle de μ_2 0,31; 0,51; 0,60.

	Charge	Perméabilité	$\lambda = 10^{cm}$.			
Échantillon.	en volume (%).	$\lambda > 5^m$.	μ_1.	μ_2.	ε_1.	ε_2.
Fer carbonyle....	34	3,7	2,0	1,0	13	0,046
Fer mécanique...	6	1,28	1,12	0,10	3,1	0,023
Fer permalloy ...	6	1,88	1,24	0,33	5,1	0,050

En outre du contrôle du degré d'isolement des grains, de leur grosseur et de leur répartition, les spectres magnétiques de tels échantillons font apparaître l'existence d'une texture magnétique microscopique, car le phénomène de relaxation se produit à des fréquences où la profondeur de pénétration du champ est de l'ordre des dimensions présumées des domaines de Weiss. Par contre, les spectres magnétiques des rubans ferromagnétiques étudiés par nous possèdent, en plus du phénomène de relaxation en très haute fréquence, un phénomène analogue, pour des fréquences plus basses dans un domaine qui ne dépasse pas, pour certains échantillons, les fréquences acoustiques. Tous ces échantillons présentent des pertes par courants de Foucault supérieures à celles calculées à partir de la résistance en courant continu.

Afin de vérifier l'hypothèse d'une texture hétérogène à l'échelle macroscopique que l'un de nous a déjà utilisée pour expliquer ces anomalies ([4]), nous avons relevé à différents stades les spectres magnétiques de rubans ferromagnétiques annulaires dont la couche superficielle était progressivement dissoute par un procédé de polissage électrolytique décrit précédemment ([5]).

([3]) I. Epelboim, *J. de Physique*, 8, 1947, p. 251.

([4]) I. Epelboim, *Thèse*, Paris 1946; *Rev. Gén. Électricité*, 55, 1946, p. 271 et 310.

([5]) I. Epelboim et C. Chalin, *Comptes rendus*, **226**, 1948, p. 324; *Métaux et corrosion*, **23**, 1948, p. 1.

A titre d'exemple, nous donnons ici un résumé des résultats de l'étude des spectres magnétiques, à divers degrés de polissage électrolytique, d'un permalloy à 76 % de Ni, en ruban de $0^{mm},2$ d'épaisseur, recuit dans l'hydrogène.

Section du fer en mm²	1,00	0,92	0,77	0,58	0,40
μ initiale séparée de l'influence des courants de Foucault	1092	1180	1250	1405	1550
Coefficient des pertes par courants de Foucault	0,188	0,123	0,096	0,050	0,027
μ_1 initiale à 10 Kc/s	340	453	655	974	1341
μ_2 » »	418	465	531	569	489

La dissolution par le polissage électrolytique de la couche superficielle de tous les ferromagnétiques massifs étudiés jusqu'à présent provoque un accroissement de la perméabilité, et une diminution des pertes par courants de Foucault supérieure à celle que laisse prévoir la diminution de section. Cet effet peut être prévu par l'étude spectroscopique de la texture magnétique, quelle que soit son origine.

Ainsi la mesure des spectres hertziens d'un mélange de diélectriques et de ferromagnétiques constitue une méthode d'étude actuellement au point de la texture magnétique microscopique. Le relevé des spectres magnétiques des ferromagnétiques massifs et l'utilisation d'un procédé de polissage anodique nous ont permis de prouver l'existence souvent discutée d'une texture magnétique macroscopique.

MAGNÉTISME. — *Influence de l'aimantation sur le pouvoir thermoélectrique des milieux ferromagnétiques*. Note (*) de M. **Jean Bouchard**, présentée par M. Aimé Cotton.

Au cours de recherches antérieures ([1]), nous avons déterminé comment varie la f. é. m. de couples formés par le cuivre et divers métaux ferromagnétiques sous l'influence combinée d'un champ magnétique longitudinal $\mathcal{H}_l$ ou transversal $\mathcal{H}_t$ et d'une tension mécanique T. Les expériences ont porté sur des éprouvettes cylindriques ($d = 1^{mm}$, $l = 26^{cm}$ pour $\mathcal{H}_l$ et $l = 7^{cm}$ pour $\mathcal{H}_t$) du métal A à étudier, soudées bout à bout avec des fils de cuivre, l'ensemble formant une chaîne soumise au champ inducteur uniforme dans sa portion ferromagnétique; les jonctions sont maintenues respectivement aux températures θ_1 et θ_0 au moyen de petits fours à enroulement compensé ou de thermostats tubulaires. Un potentiomètre à deux sections fournit : 1° la f. é. m. E du couple entre θ_1 et θ_0; 2° la différence $\Delta E = E' - E$, E' étant la f. é. m. entre θ_1 et θ_0 lorsqu'on soumet l'éprouvette à un champ inducteur $\mathcal{H}$ et à une traction T.

Nous avons poursuivi ces déterminations, dont les résultats seront donnés ailleurs, en soumettant aux expériences commencées avec les ferronickels des

(*) Séance du 19 mai 1948.

([1]) G. Simon et J. Bouchard, *Comptes rendus*, **205**, 1937, p. 1141 et **206**, 1938, p. 667.

échantillons d'aciers, des cupronickels et divers alliages ternaires à base de nickel de compositions et de préparations très diverses.

Pour comparer les données obtenues, nous avons retenu plus particulièrement les graphiques représentant ΔE en fonction de $\mathcal{H}$, pour différentes valeurs de $\theta_1 - \theta_0$ et de T. La différence ΔE est caractéristique du métal ferromagnétique, dans les conditions de l'expérience et, ainsi que nous l'avons vérifié directement sur de nombreux exemples, ne dépend pas, comme E, du métal auxiliaire. Il nous semble logique de représenter tout d'abord ΔE en fonction du champ extérieur bien défini (et de tenir compte s'il y a lieu des champs démagnétisants); il est difficile, en effet, à cause de la multiplicité des variables influant sur sa valeur, de rapporter systématiquement les résultats à l'aimantation de l'échantillon : par suite notamment de la déformation des courbes d'aimantation avec la température, on peut avoir, dans les champs faibles, l'aimantation la plus grande du côté des températures élevées et l'inverse dans les champs élevés.

Toutefois, malgré la complexité du problème et les conditions nécessairement approchées qui se trouvent imposées par sa nature même, nous avons voulu, d'autre part, examiner l'influence de l'aimantation sur ΔE.

Les mesures d'aimantation ont été réalisées sur l'éprouvette, dans les conditions des déterminations de ΔE au moyen des deux méthodes classiques du magnétomètre et du galvanomètre balistique, qui ont fourni des résultats en accord satisfaisant. Une bobine induite est connectée, en outre, à l'entrée d'un amplificateur, permettant de mettre en évidence les zones d'effet Barkhausen appréciable; la variation du courant inducteur est alors assurée pour les faibles intensités par variation de chauffage d'une diode et pour les intensités plus importantes au moyen d'un rhéostat électrolytique. La désaimantation de l'éprouvette est obtenue à l'aide d'un courant alternatif décroissant. Dans des conditions données (θ, T) l'étude d'un cycle d'hystérésis s'effectue en quelques minutes, durée assez courte pour assurer à la différence des températures la constance ($1/5^e$ environ) indispensable à la mesure de ΔE (à 2.10^{-7} volt près).

1° Le phénomène fondamental, variation du pouvoir thermoélectrique avec l'aimantation spontanée, ne peut être décelé directement. Même un renversement complet de l'aimantation correspondant à un grand saut de Barkhausen (étudié avec des ferronickels à magnétostriction positive soumis à une tension convenable) ne provoque aucune variation particulière de ΔE. Cependant l'influence de l'aimantation spontanée sur le pouvoir thermoélectrique doit être recherchée sur la courbe représentant la dérivée $dE/d\theta$ en fonction de $\theta_1 - \theta_0$ qu'on peut tracer à partir de la courbe de E en fonction de $\theta_1 - \theta_0$. Comme l'a signalé antérieurement M. P. Chevenard, le pouvoir thermoélectrique des ferromagnétiques présente une variation brusque au point de Curie. Nous avons toujours retrouvé ce résultat et constaté qu'en général (nickel, alliages de nickel et de cuivre et d'aluminium) $dE/d\theta$ diminue, en valeur absolue, régulièrement, lorsque la température s'abaisse; l'apparition de l'aimantation spontanée correspond à une brusque augmentation de $dE/d\theta$ qui croît avec cette

aimantation et peut atteindre deux à trois fois sa valeur (extrapolée) en l'absence d'aimantation spontanée. On peut suivre cette variation en mettant en évidence l'aimantation par orientation au moyen d'un champ (et en tenant compte de ΔE). Pour le nickel, par exemple, $dE/d\theta$ passe de -7 à $-16\,\mu V$ par degré au lieu de -7 à $-3\,\mu V$ par degré entre 360° et 210° et l'aimantation à saturation de 50 à 425 UEM.

2. L'étude systématique de ΔE (f. é. m. du couple : métal A aimanté, A non aimanté) en fonction de l'aimantation observable $\mathcal{J}$ due à l'orientation par $\mathcal{H}$ fournit $(d\Delta E/d\theta)_{\mathcal{J}}$ par rapport au métal non aimanté. Les résultats nous ont permis d'établir l'ordre suivant des pouvoirs thermoélectriques décroissants : A aimanté longitudinalement, A non aimanté, A aimanté transversalement. Dans le cas du nickel, des cupronickels et des ferronickels réversibles recuits, ΔE tend vers une limite ΔE_{lim} lorsque $\mathcal{J}$ approche de la saturation $\mathcal{J}_s$ et $(d\Delta E/d\theta)_{\mathcal{J}_s}$ est une fonction parabolique de θ, qu'on peut, entre 0° et 300°, assimiler à une droite. Voici quelques valeurs de $(d\Delta E/d\theta)_{\mathcal{J}_s}$ en μV par degré correspondant à un champ $\mathcal{H}_l$:

	Nickel.	Permalloy.	Ferronickels.		
Ni (%)...............	99,6	78,0	72,1	58,0	48,5
$\left(\frac{d\Delta E}{d\theta}\right)_{\mathcal{J}_s}$...........	0,24	0,11	0,14	0,08	0,07

Avec le fer, les aciers, les ferronickels non réversibles, les alliages ternaires, $d\Delta E/d\theta$ varie de manière complexe avec $\mathcal{J}$ suivant les traitements, et le classement précédent peut se trouver en défaut. Il en est de même lorsqu'on soumet l'éprouvette à une tension. L'étude de ΔE au cours d'un cycle d'hystérésis nous permettra de classer bien des influences d'après leur contribution à modifier les parties réversibles et irréversibles de l'aimantation.

RADIOÉLECTRICITÉ. — *Flux d'impulsion définissant le seuil de fonctionnement d'un récepteur-enregistreur du niveau moyen des atmosphériques.* Note (*) de M. **Fernand Carbenay**, présentée par M. Camille Gutton.

Pour rendre comparables, en valeur absolue, les enregistrements du niveau moyen des atmosphériques, il est nécessaire d'introduire un paramètre analogue à celui utilisé couramment pour définir l'amplitude des ondes entretenues (l'intensité du champ électrique).

Le seuil de fonctionnement d'un ensemble récepteur-enregistreur peut être défini par l'impulsion $\Phi_0 = \int_0^\infty e\,dt$ provoquant le fonctionnement limite de l'enregistreur, d'une force électromotrice e, de forme quelconque, induite

(*) Séance du 19 mai 1948.

dans l'antenne, mais de durée suffisamment courte devant la période T du récepteur.

A cette impulsion Φ_0 correspond une impulsion par unité de longueur ou un flux par mètre $\Psi_0 = \Phi_0/h$, h étant la hauteur effective de l'antenne.

L'impulsion Φ_0 peut être produite dans l'antenne par une variation continue et suffisamment rapide entre deux limites I_1 et I_2 d'un courant i circulant dans un enroulement couplé à la base de l'antenne ([1]).

En désignant par M l'inductance mutuelle entre l'enroulement et l'antenne, l'impulsion de la force électromotrice induite dans l'antenne par la variation continue du courant i de I_1 à I_2 est

$$\Phi_0 = \int_0^0 \left(-M\frac{di}{dt}\right) dt = M(I_1 - I_2).$$

La variation du courant i est obtenue par la fermeture d'un contact qui fait croître ou décroître l'intensité du courant, dans l'enroulement inducteur, suivant une loi exponentielle et avec une constante de temps $\tau = L/R$ suffisamment petite devant la période d'accord du récepteur (par exemple, τ sera au plus égale à une microseconde pour un accord sur une longueur d'onde de 11000^m).

L'antenne étant généralement éloignée de l'enregistreur qu'il faut observer, on produit les impulsions en actionnant le contact par l'intermédiaire d'un relais et l'on règle la variation $(I_1 - I_2)$ à la valeur correspondant au seuil de fonctionnement de l'enregistreur.

L'enroulement inducteur doit avoir des dimensions assez petites par rapport à celles de l'antenne pour que l'inductance mutuelle M garde son sens, et cet enroulement doit être assez éloigné de l'antenne pour que la capacité de celle-ci par rapport à la terre ne soit pas sensiblement affectée.

La détermination de l'impulsion Φ_0 dans l'antenne peut aussi se déduire de la mesure de l'impulsion Φ_1, dans le circuit d'entrée du récepteur, correspondant au seuil de fonctionnement.

Il existe généralement une relation simple entre Φ_0 et Φ_1 : par exemple, dans le cas d'une antenne capacitive dont la base est reliée par un câble coaxial au circuit d'entrée du récepteur, en désignant par γ la capacité de l'antenne par rapport à la terre et par $\mathcal{C}$ la somme des capacités du câble et éventuellement du condensateur d'accord en parallèle; on a, en supposant les pertes localisées dans l'inductance du circuit d'entrée :

$$\Phi_0 = \left(1 + \frac{\mathcal{C}}{\gamma}\right)\Phi_1.$$

([1]) F. Carbenay, *Comptes rendus*, **224**, 1947, p. 1624. (Brevet n° provisoire 518.518 du 12 juillet 1946).

La mesure de Φ_1 se fait aisément soit par induction comme ci-dessus, soit en insérant dans le circuit d'entrée la différence de potentiel aux bornes d'une petite fraction r de la résistance R du circuit de décharge d'un condensateur de capacité C chargé à une différence de potentiel U [1].

On règle la différence de potentiel U à la valeur correspondant au fonctionnement limite de l'enregistreur. En désignant par i l'intensité du courant de décharge et par τ la constante de temps CR,

$$\Phi_1 = \int_0^\infty ri\,dt = r\mathrm{CU} = \frac{r}{\mathrm{R}}\tau\mathrm{U}.$$

Le calcul du flux d'impulsion par mètre $\Psi_0 = (\Phi_0/h)$ implique la connaissance de la hauteur effective de l'antenne qui peut être mesurée par la combinaison apériodique de l'antenne (de capacité γ) et d'un cadre (de N spires de surface S) faisant l'objet d'une Note antérieure [1]

$$h = \frac{\mathrm{NS}}{\mathrm{R}\gamma c},$$

c étant la vitesse de propagation et R la résistance de couplage antenne-cadre réglée à la valeur de compensation, soit sur atmosphériques, soit sur ondes entretenues.

SPECTROSCOPIE. — *Présence possible du spectre de la molécule d'hélium dans le rayonnement du ciel nocturne.* Note (*) de Mme **Renée Herman**.

Malgré de nombreux spectres obtenus jusqu'ici dans le visible et dans l'ultraviolet, il reste encore bien des incertitudes sur les identifications des bandes observées. En raison de la faible dispersion employée et de la complexité du spectre, il est impossible de déterminer la structure des bandes et même souvent difficile de repérer leurs têtes avec précision. On se contente généralement de chercher des coïncidences numériques entre les maxima observés dans le spectre du ciel et les têtes de bandes mesurées au laboratoire ou trouvées par extrapolation des formules qui ne sont trop souvent valables que pour les bandes pour lesquelles elles ont été calculées. De plus, dans bien des cas, la répartition d'intensité ne suit pas le principe de Frank-Cordon. Malgré toutes ces tentatives, il reste encore un certain nombre de bandes non identifiées.

Les radiations identifiées avec certitude jusqu'ici proviennent presque exclusivement de transitions interdites atomiques ou moléculaires. Dans le cas de la

---

(1) R. Bureau, *Mémorial de l'Office National Météorologique de France*, n° 25, 1936, p. 4.

(1) F. Carbenay, *Comptes rendus*, **222**, 1946, p. 63. (Brevet n° 899139 du 28 juin 1943).

(*) Séance du 10 mai 1948.

molécule N_2, on a affaire à un gaz qui se comporte à bien des égards comme un gaz inerte. De plus, l'ionisation atmosphérique est assez grande et la recombinaison entre ions et électrons joue certainement un rôle important. C'est probablement à la suite d'un tel processus que se produit l'émission des systèmes permis de N_2. Pour ces raisons, il semble indiqué, pour interpréter les émissions observées, de chercher avant tout parmi les systèmes de bandes émis par des molécules pour lesquelles on observe effectivement un spectre de recombinaison et qui, en même temps, ne présentent aucune affinité chimique. Un de ces rares exemples est fourni par la molécule He_2.

Pour obtenir au laboratoire l'émission de tout le spectre de He_2 par recombinaison, il est nécessaire de prendre certaines précautions qui seront décrites prochainement. Sous une pression de l'ordre du dixième de millimètre de mercure, les raies He_1 et les bandes de He_2 sont présentes en phosphorescence. Au moment de la rupture du courant, pour une pression de l'ordre du millimètre de mercure, le spectre d'arc disparaît pratiquement, tandis que l'intensité des bandes varie peu. C'est ce que l'on peut voir sur la figure ci-dessus où D correspond à la décharge et P à la phosphorescence. On doit admettre pour ces bandes une émission par recombinaison des ions He_2^+ et des électrons lents. Ces ions sont formés à la suite d'un choc entre un ion He^+ et un atome normal $He(^1S)$. La formation de tels ions pourrait être importante dans les couches atmosphériques où, par suite de l'attachement des électrons, la concentration relative en ions atomiques positifs est notable.



Dans le cas du système de Vegard-Kaplan de la molécule N_2, l'extrapolation de la formule empirique pour les têtes de bandes conduit à des résultats exacts, mais lorsqu'on compare les intensités observées au laboratoire aux intensités évaluées dans le rayonnement du ciel nocturne, il semble y avoir des anomalies remarquables. Elles peuvent s'expliquer en admettant que la plupart des molécules d'azote à l'état métastable $A^3\Sigma$ sont aux niveaux de vibration $v' = 1, -3$, ou 4 (1). Mais on pourrait également se demander s'il n'existe pas, superposé à ce système interdit, des transitions permises de He_2. Dans le visible, la plupart des bandes intenses du système $A \rightarrow X$ de N_2, observées dans le ciel, coïncident avec des bandes de He_2. C'est le cas pour 3889, 3949, 3982, 4140, 4169, 4219, 4270, 4316, 4488, 4615, 4650, 4715, 4772. 4421 et 4534 feraient partie

(1) J. Cabannes et J. Dufay, *Annales de Géophysique*, 2, 1946, p. 290.

des groupes intenses du système de bandes correspondant à l'ortohélium. D'autres coïncidences intéressantes pourraient être cherchées pour les bandes d'hélium 4003, 4022, 4157, 4189, 4356, 4398, 4414, 4445, 4570, 4673, 4956. Les transitions correspondant au parhélium donnent un meilleur accord que celles de l'orthohélium.

Si cette interprétation est correcte, l'émission des bandes He_2 sera accompagnée de l'émission du spectre continu situé entre 1100 et 600 Å, et cette radiation pourrait jouer un rôle dans l'ionisation de l'oxygène et de l'azote dans l'atmosphère.

SPECTROGRAPHIE. — *Spectrographie infrarouge à cellule au sulfure de plomb.* Note (*) de Mme **Raymonde Mathis** et M. **Marcel Larnaudie**, présentée par M. Jean Cabannes.

Le système optique du spectrographe employé a déjà été décrit (¹). Il comporte un *réseau échelette* de Wood ($7^{cm},7$ de large, 815 traits/cm.) qui concentre l'énergie dans le spectre infrarouge vers 3 microns.

La source est une lampe pour phare d'automobile du type Yvel (92 bougies), alimentée sous 6 volts. La lumière est modulée à une fréquence constante, au moyen d'un disque à secteurs. Un système de miroirs argentés, plans et concaves, permet d'envoyer sur le réseau un faisceau de lumière parallèle et de former l'image du spectre sur la fente de sortie du spectrographe. Les fentes d'entrée et de sortie sont ajustées à la même largeur (3,5/100 de millimètre pour l'étude que nous avons faite). Le réseau est animé d'un mouvement de rotation à vitesse réglable, ce qui permet de faire défiler sur la fente de sortie une portion choisie du spectre, correspondant à un certain intervalle de longueur d'onde. Sa rotation est liée mécaniquement au déplacement d'un enregistreur. Le système récepteur placé derrière la fente se compose d'une cellule photorésistante au sulfure de plomb à enveloppe de verre, et d'un amplificateur électronique à trois étages à courant alternatif. Le courant redressé est envoyé dans un galvanomètre dont les déviations sont directement enregistrées en fonction de la longueur d'onde, sur un papier photographique entraîné par la plateforme de l'enregistreur. Les cellules au sulfure de plomb ont déjà été utilisées en spectrographie infrarouge (²).

Le domaine d'emploi de l'appareil est limité par ceux de la source et du réseau et par la sensibilité spectrale de la cellule photorésistante. Il en résulte qu'il est possible d'utiliser ce montage, d'une part de 2^{μ} à $2^{\mu},85$ (spectre de

(*) Séance du 19 mai 1948.

(¹) Lecomte et Lambert, *Comptes rendus*, 203, 1936, p. 164, 167.

(²) Fellgett, G. B. B. M. Sutherland et D. E. Blackwell, *Nature*, 158, 1946, p. 873.

1er ordre du réseau), et d'autre part de $1^{\mu},45$ à $2^{\mu},45$ (spectre de 2e ordre), comme l'indique la courbe de sensibilité que nous reproduisons (*fig.* 1).

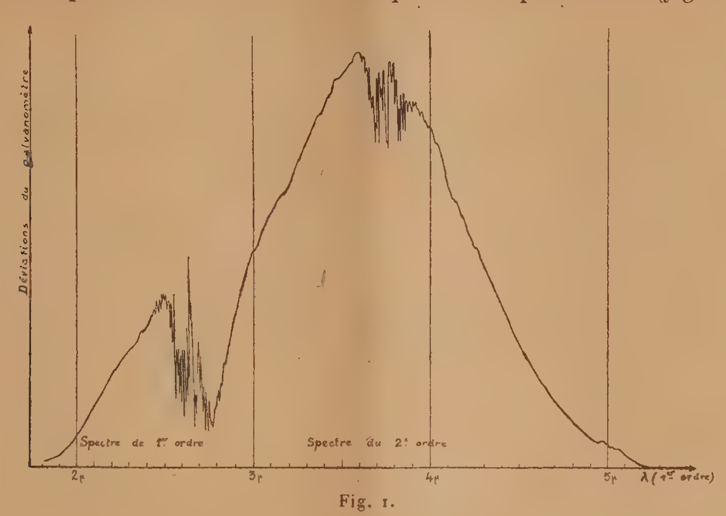


Fig. 1.

L'ensemble du spectrographe et de l'amplificateur permet de déceler un flux lumineux de 2.10^{-8} lumen, correspondant à une déviation de un millimètre du spot sur l'enregistreur.

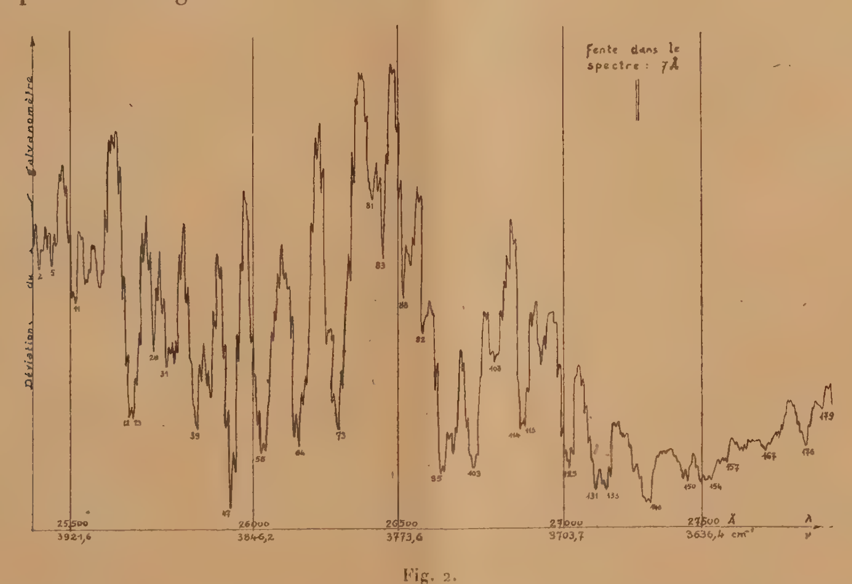


Fig. 2.

Le pouvoir de résolution théorique du réseau est de 5 Å. Les fentes employées occupaient dans notre étude un domaine de 7 Å dans le spectre, ce

qui correspond à une utilisation à peu près totale du pouvoir de résolution du réseau.

Nous avons étudié les caractéristiques de l'appareil (sensibilité spectrale, stabilité mécanique, dispersion etc.) au moyen des bandes de la vapeur d'eau atmosphérique à $2^{\mu},66$ et $1^{\mu},8$: la première est représentée sur la figure 2.

Nous avons comparé le résultats obtenus à partir de ce spectre, aux résultats donnés par H. H. Nielsen (3).

Entre les fréquences 3952 et 3601,6 cm^{-1}, il a été possible de mettre en évidence 186 bandes de rotation de la vapeur d'eau. 114 d'entre elles correspondent à 114 bandes sur les 116 bandes indiquées par Nielsen (3). Certaines de celles-ci semblent résolues en plusieurs bandes dans notre spectre.

Les fréquences des bandes communes aux deux spectres se correspondent à moins d'un cm^{-1} près.

PHYSIQUE NUCLÉAIRE. — *Sur les désintégrations nucléaires provoquées par mésons.* Note (*) de MM. **Jean Heidmann** et **Louis Leprince-Ringuet**, présentée par M. Maurice de Broglie.

Dans des plaques Ilford exposées au rayonnement cosmique à 4000^{m}, MM. Hoang, Jauneau, Morellet, Stroumsa ont repéré jusqu'à présent 46 désintégrations nucléaires provoquées par mésons.

Ce qui frappe dans l'aspect général de ces étoiles dites σ, est la faiblesse de l'énergie libérée par le méson sous forme observable (1). On trouve en gros que les particules ionisantes émises emportent par étoile 25 MeV d'énergie cinétique et d'énergie de liaison, valeur très inférieure à l'énergie de masse des mésons.

Avant d'envisager un mécanisme défini pour l'interaction des divers mésons avec le noyau, nous pouvons estimer la valeur de cette excitation en étudiant la répartition en énergie des particules émises. Nous allons effectuer cette étude sur les α émis qui ont sur les protons les avantages suivants :

Ils sont, à énergie égale, plus courts, donc ils ont plus de chance de se terminer dans l'émulsion; ils sont plus nombreux que les protons observés; les α ne pouvant franchir la barrière de potentiel des noyaux lourds de l'émulsion (Br, Ag) que s'ils ont plus de 120^{μ} de parcours, nous pouvons identifier des étoiles produites sur noyaux légers (B, C, N, O, Na), lorsqu'il y aura, parmi les branches, un α de longueur inférieure à 120^{μ}. En nous limi-

(3) *Phys. Rev.*, 62, 1942, pp. 422-433.

(*) Séance du 3 mai 1948.

(1) Perkins, *Nature*, 161, 1948, p. 486; Lattes, Occhialini et Powell, *Nature*, 160, 1947, p. 486.

tant ainsi à l'étude des noyaux légers, nous avons l'avantage d'avoir affaire à un phénomène mieux défini, car le seul méson qui sera capté sera le méson de masse 315 (²) (³). Considérons donc seulement les étoiles qui éjectent des α inférieurs à 120^{μ}. Nous aurons affaire aux noyaux légers, dont la masse atomique moyenne est 14.

La probabilité pour qu'un α ait une énergie cinétique E est alors, sous réserve des restrictions indiquées à la fin de cette Note, de la forme $\sqrt{E+V}/\exp[(E+V)/kT]$, où $V \sim 4$ MeV est l'énergie de liaison d'un α dans un noyau léger et T la température du noyau.

On a donc : $\log_{10} n + K - \log_{10}\sqrt{E+4} = -0{,}434(E+4)/kT + \text{const.}$, où n est la fréquence en énergie des traces d'α se terminant dans l'émulsion et K est un terme correctif tenant compte des traces qui sortent de l'émulsion. Les valeurs expérimentales de $\log_{10} n + K - \log_{10}\sqrt{E+V}$ en fonction de E donnent, par la méthode des moindres carrés : $kT = 6{,}5 \pm 3$ MeV.

Si l'on suppose alors que les α sont en équilibre thermique avec les nucléons et que ceux-ci forment un gaz dégénéré de Fermi, contenu dans une sphère de rayon $1.5\,10^{-13}\,A^{1/3}$ cm (A, masse atomique) et que la concentration en α à l'intérieur des noyaux est négligeable, on trouve que l'excitation laissée à ces noyaux légers a pour valeur la plus probable 65 MeV, avec malheureusement un fort écart standard.

2° On peut retrouver cet ordre de grandeur en tenant compte d'une évidence expérimentale supplémentaire. Dans les 31 étoiles de la statistique ci-dessus, on trouve que n_p = nombre de protons émis par étoile $= 0{,}87$; n_α = nombre d'α émis par étoile $= 1{,}64$; E_α = énergie cinétique moyenne des $\alpha = 9$ MeV.

On doit donc avoir, si la désexcitation se fait principalement par évaporation de neutrons, protons et α

$$0{,}87\,(E_P + 8) + 0{,}87\,\frac{n_N}{n_P}\,(E_N + 8) + 1{,}64\,(E_\alpha + 4) = 1{,}55\,k^2T^2 \quad \text{(unité d'énergie : 1 MeV)}.$$

Pour la température la plus probable trouvée, on a, d'après la théorie du gaz de Fermi, compte tenu de la barrière de potentiel, et avec notre schéma simplifié, $n_N \sim 1{,}5\,n_P$, $E_P \sim E_N + 1{,}5$, d'où la relation

$$E_N = \frac{\displaystyle\int_{30}^{\infty} \frac{\sqrt{E}\,(E-30)\,dE}{e^{\frac{E}{kT} - \log\alpha} + 1}}{\displaystyle\int_{30}^{\infty} \frac{\sqrt{E}\,dE}{e^{\frac{E}{kT} - \log\alpha} + 1}} = 0{,}74\,k^2T^2 - 18{,}4,$$

où 30 est la profondeur du puits de potentiel.

(²) Gardner et Lattes, *Science*, 12 mars 1948.

(³) Conversi, Pancini et Piccioni, *Phys. Rev.*, 71, 1947, p. 209.

On peut négliger le $+1$ des dénominateurs des intégrales et plusieurs intégrations par parties conduisent à $kT = 5,7$ MeV, $E = 50$ MeV.

Nous avons négligé le fait que le noyau n'est pas rigoureusement en équilibre thermique, que sa température baisse au cours de l'évaporation et que la concentration en particules α n'est pas négligeable (ces deux faits se compensent d'ailleurs en gros). De plus l'assimilation des nucléons d'un noyau léger aux particules d'un gaz de Fermi n'est possible que vu le petit nombre de nos données expérimentales.

En somme, le calcul précédent montre que, dans le cas d'un méson 315 absorbé par un noyau léger, plus de la moité de l'énergie de masse du méson disparaît sous une forme qui échappe à nos observations : après le départ de cette énergie, le noyau reste excité avec 50 à 60 MeV en moyenne et c'est la désexcitation correspondante que nous observons.

On peut envisager plusieurs hypothèses pour le premier stade :

a. Le méson serait annihilé par une paire de nucléons qui s'échapperaient du noyau en l'excitant peu ([4]). L'observation de certaines étoiles est défavorable à cette hypothèse;

b. Le méson serait capté par un nucléon du noyau qui prend son énergie de masse sous forme cinétique et quitte le noyau en l'excitant peu au passage ([5]). Ce processus paraît s'accorder avec l'ensemble des résultats expérimentaux;

c. D'autres phénomènes peuvent aussi intervenir (émission de mésons neutres, etc,) sur lesquels nous ne pouvons nous actuellement prononcer.

RADIOACTIVITÉ. — *Compteur de particules α pour les gaz radioactifs.* Note (*) de MM. **D. K. Yovanovitch** et **D. D. Yovanovitch**, présentée par M. Frédéric Joliot.

On a besoin, en radioactivité, d'analyser des mélanges contenant les deux isotopes du MsThI et du Ra, pour connaître la proportion de ces corps. Nous avons essayé d'effectuer cette analyse à l'aide d'un compteur basé sur le principe de Geiger, qui compte toutes les particules ayant traversé un tube en verre à parois très minces, au travers duquel on fait passer un courant constant de gaz radioactif.

Ce compteur est établi sur le principe suivant :

Imaginons un compteur de Geiger normal au tube à parois minces et faisons tourner ce compteur de 2π autour du tube comme axe. Le fond métallique du

---

([4]) Serber, *Phys. Rev.*, 72, 1947, p. 1114.

([5]) Cuer et Morand, *Comptes rendus*, 226, 1948, p. 649; Perkins, *Nature*, 161, 1948, p. 486.

(*) Séance du 3 mai 1948.

compteur enveloppe une surface cylindrique, ou plutôt, puisqu'il est percé d'un trou, deux surfaces cylindriques coaxiales séparées par un espace égal au diamètre de ce trou. L'extrémité de la pointe intérieure du compteur (formée d'une petite sphère) décrit un cercle de diamètre légèrement supérieur à celui des cylindres (1 à 2^{mm} de plus). Le tube axial a ses parois amincies dans la portion qui correspond à l'espace entre les deux cylindres.

Nous avons matérialisé ce compteur *de révolution* de la manière suivante.

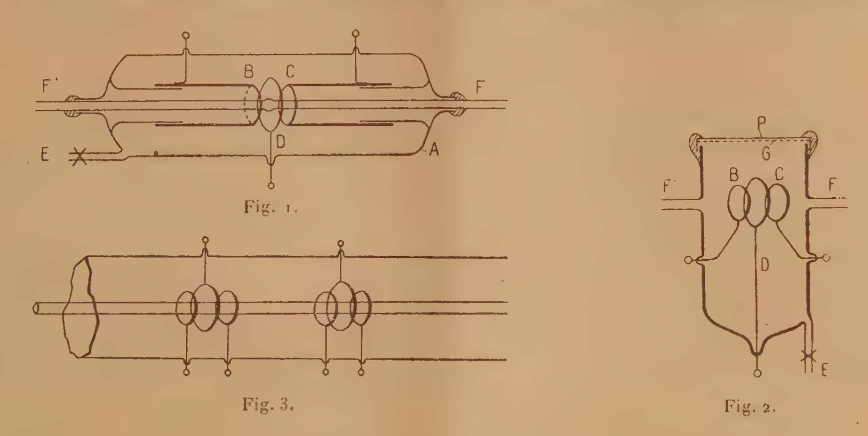


Fig. 1.

Fig. 3.

Fig. 2.

Le tube en verre cylindrique A supporte, par son repli intérieur, les deux cylindres métalliques B et C, qui sont chargés au même potentiel. L'électrode D, constituée par un fil métallique circulaire, est en liaison avec l'amplificateur. Le vide nécessaire pour la marche du compteur se fait par l'ajutage E. Le tube de verre axial F'F est très mince (1/100 mm env.). Ces parois minces permettent le passage des rayons α provenant de la désintégration du Radon et du Thoron, lesquels, mélangés à l'air, passent de F en F'.

Une étude détaillée de ce type de compteur nous a amenés à supprimer même les deux cylindres A et B et à les remplacer par deux anneaux appropriés, reliés à la source de haute tension.

Nous avons également établi un compteur du même genre (*fig.* 2), muni d'une fenêtre P de mica très mince supportée par une grille G en fil de tungstène.

On peut utiliser ce compteur soit pour compter les rayons α qui viennent de l'extérieur après avoir traversé la fenêtre de mica, soit ceux qui viennent de l'intérieur, en passant par le tube disposé de F en F' comme dans le premier compteur, mais non dessiné sur la figure 2.

Enfin, on peut disposer un nombre quelconque de compteurs analogues le long d'un même tube, comme le montre la figure 3. Un tel dispositif permettra alors de mesurer les périodes de décroissance très courtes de certains éléments radioactifs.

Dans le cas où il s'agit d'évaluer le rapport Radon/Thoron, on effectue deux mesures : l'une dans laquelle les gaz parviennent immédiatement dans le compteur et l'on a alors l'effet total des particules α du Tn et du Rn; l'autre dans laquelle les gaz ne parviennent dans le compteur qu'après un parcours assez long pour que le Tn ait pratiquement disparu par désintégration.

CHIMIE PHYSIQUE. — *Sur la polymérisation du styrolène induite par neutrons lents.* Note de MM. **Ivan Landler** et **Michel Magat**, présentée par M. Frédéric Joliot.

Plusieurs auteurs ([1]), ([2]) ont déjà induit la polymérisation de divers composés vinyliques par des neutrons rapides. Mais aucun n'a précisé le mécanisme producteur des centres initiateurs, les réactions des neutrons rapides étant trop complexes.

Nous avons repris ce problème, mais pour le simplifier nous avons utilisé des neutrons lents. Ceux-ci sont absorbés par certains noyaux avec émission d'un rayon γ de grande énergie dont le choc de recul provoque la rupture de la liaison entre l'atome et le reste de la molécule (effet Szilard-Chalmers). Il se forme un atome et un radical libre, capables chacun de déclencher la polymérisation. Nos expériences portaient sur le styrolène dont la polymérisation est bien connue. La source d'atomes et de radicaux libres était le bromure d'éthyle : les atomes de brome ont une grande section efficace pour la capture des neutrons thermiques ($\sigma^c_{Br} = 6{,}6 . 10^{-24}$ cm^2) et l'isotope 82Br possède une période suffisamment longue (33,6 h) pour permettre une étude commode.

Il s'est révélé impossible de négliger les radicaux libres et les atomes produits par l'effet Szilard-Chalmers de l'hydrogène qui, dans le cas de l'expérience n° 34 (40 % styrolène, 60 % bromure d'éthyle en poids), constituent 1/3 du total : en effet quoique la section efficace de l'hydrogène soit faible ($\sigma^c_H = 0{,}31 . 10^{-24}$ cm^2), le nombre des atomes d'hydrogène présents est beaucoup plus élevé que celui des atomes de Br.

Des ampoules contenant des mélanges de styrolène et de bromure d'éthyle en proportions variables ont été scellées sous vide et exposées aux neutrons lents produits par le cyclotron du Collège de France. Le polymère a été séparé et pesé. Son poids moléculaire a été déterminé par osmométrie. La radioactivité et la période de décroissance ont été mesurées. Des expériences parallèles ont montré qu'aucune quantité appréciable de polymère n'avait été formée en l'absence d'irradiation.

Nos expériences ne permettent pas encore des conclusions définitives, mais les faits suivants paraissent démontrés :

([1]) Hopwood et Philips, *Proc. Phys. Soc.*, **50**, 1938, p. 438; *Nature*, **143**, 1939, p. 140.

([2]) F. Joliot, Communication privée.

1° Les neutrons lents sont capables d'induire la polymérisation par l'effet Szilard de Br et de H;

2° la quantité de polymère formée dépend de la dose de neutrons, la relation exacte restant à déterminer;

3° les atomes Br sont capables de déclencher la polymérisation, le polymère formé contenant du Br radioactif lié;

4° le poids P du polymère formé dans différents mélanges peut être représenté par

$$P = (K_H \Sigma_H + K_{Br} \Sigma_{Br}) (S)^2, \tag{1}$$

où (S) = concentration du styrolène, Σ_H, Σ_{Br} = les sommes de sections efficaces de capture de tous les atomes de H et Br présents, K_H, K_{Br} = des constantes dans chaque série d'expériences comprenant : la dose d'irradiation, la constante de vitesse de polymérisation, le temps et des facteurs de production de centres *secondaires* dont il sera question plus loin. On peut en conclure que la formation de centres initiateurs par les rayons γ du cyclotron est négligeable car elle donnerait naissance à un terme indépendant de la composition du mélange;

5° à partir de l'activité du polymère et des conditions d'irradiation il est possible de calculer le *nombre de radicaux libres et d'atomes formés par effet Szilard* au cours de l'expérience. Dans l'expérience n° 34 par exemple, ce nombre est de $1,4.10^{14}$. Il est d'autre part possible d'évaluer le *nombre de centres initiateurs nécessaires pour produire la polymérisation observée*, connaissant la quantité du polymère formé, son poids moléculaire, et la fréquence de *transfert* [3], [4] par le mécanisme

$$M_n^* + XR \rightarrow M_nX + R^* + M \rightarrow M_nX + RM^* + M \rightarrow \ldots$$

Ce nombre est de l'ordre de 3.10^{16}, c'est-à-dire 100 à 1000 fois plus grand que le nombre de centres formés par effet Szillard.

6° Il se forme donc des centres de nature secondaire qui peuvent avoir trois origines distinctes : *a*. l'ionisation par les rayons de capture, les ions se recombinant ensuite et se redissociant pour donner des radicaux [5]; *b*. l'ionisation par les rayons β et γ émis au cours de la désintégration du Br suivie de formation de radicaux libres; *c*. la dissociation des molécules par collision avec les atomes H et Br libérés par l'effet Szillard et possédant une grande énergie cinétique (jusqu'à 3500 et 27000 Kcal respectivement).

7° L'efficacité relative des atomes Br et H pour la production de centres secondaires est donnée par le rapport $R = K_{Br}/K_H$, $R \sim 2$ dans nos expériences.

---

(3) Mayo, *J. Amer. Chem. Soc.*, **65**, 1943, p. 2314.

(4) Bamford et Dewar, *Trans. Farad. Soc.* (à paraître).

(5) Dainton, *Nature*, **160**, 1947, p. 268.

CHIMIE PHYSIQUE. — *Sur la composition particulaire quantitative des acides nitriques concentrés.* Note (*) de M. **Jean Chédin**, Mme **Suzanne Fénéant** et M. **Robert Vandoni**, présentée par M. Paul Pascal.

Au cours de travaux précédents ([1]), ([2]), ([3]) nous avons été amenés à conclure que les mélanges NO_3H, H_2O très concentrés en NO_3H seraient constitués par les particules suivantes : molécules libres (NO_2OH et H_2O), hydrate sans tension de vapeur ($H_2O—NO_2OH$) et des ions (NO_3^-, H_3O^+).

Un mélange concentré à $x\%$ NO_3H en poids peut donc s'écrire rapporté à 1 molécule NO_3H totale

$$\text{(I)} \qquad \alpha NO_2—OH + \beta(NO_3^- H_3O^+) + \gamma(NO_2.OH.mH_2O) + \delta H_2O.$$

On a écrit l'hydrate sous forme NO_3H, mH_2O, d'une part pour avoir autant d'inconnues que d'équations, d'autre part pour savoir avec quelle précision le calcul confirme l'existence de l'hydrate à 1 H_2O.

D'après (I) les concentrations moléculaires (C_N et C_{H^2O}) en $NO_2—OH$ et H^2O *libres* sont respectivement

$$\frac{\alpha}{1+\beta+\delta} \quad \text{et} \quad \frac{\delta}{1+\beta+\delta}.$$

Admettant que le mélange écrit sous la forme I, c'est-à-dire eu égard à ses constituants réels (ions, molécules et complexes) soit idéal, C_N et C_{H_2O} seraient égaux aux activités respectives de l'acide nitrique et de l'eau dans le mélange. L'étude des tensions de vapeur fournit (aux corrections près de gaz parfaits) une valeur de ces activités p/p_0 et p'/p'_0 (p, p' tensions de vapeurs partielles de NO_3H et H_2O purs à la même température).

Si l'on connaît p, p', p_0, p'_0 et i, on dispose alors du système d'équations suivant qui permet de calculer α, β, γ, δ et m.

$$\text{(II)} \quad \left\{ \begin{array}{lll} \alpha+\beta+\gamma=1 & (1), & \\ \beta=i & (2) & (i = \text{coefficient d'ionisation}), \\ \dfrac{\alpha}{1+\beta+\delta}=\dfrac{p}{p_0} & (3), & \\ \dfrac{\delta}{1+\beta+\delta}=\dfrac{p'}{p'_0} & (4), & \\ \beta+m\gamma+\delta=h & (5). & \end{array} \right.$$

h, nombre de molécules H_2O ajoutées à 1 (NO_3H) pour avoir le mélange à $x\%$.

i, coefficient d'ionisation a été déterminé spectrographiquement et avec un

(*) Séance du 19 mai 1948.

([1]) J. Chédin et S. Fénéant, *Mém. des Serv. Chim. de l'État*, **32**, 1946, p. 92.

([2]) J. Chédin et S. Fénéant, *Comptes rendus*, **224**, 1947, p. 930.

([3]) J. Chédin et S. Fénéant, *Comptes rendus*, **224**, 1947, p. 1424.

bon accord par plusieurs auteurs ([4]), ([5]), ([6]). Les valeurs choisies sont celles de Dalmon ([5]). p, p_0, p', p'_0 ayant été mesurés par Wilson et Milles à 20° ([7]), nous avons repris leurs mesures et obtenu des résultats très concordants. Les valeurs utilisées ci-dessous sont extrapolées sur la courbe (presque rectiligne) compensant au mieux les deux séries de mesures.

Le Tableau suivant rassemble les éléments du calcul des α, β, γ, δ et m pour les acides nitriques compris entre 75 et 100 % (pondérale).

x (%).	h.	β.	$\frac{p'}{p'_0}$.	$\frac{p}{p_0}$.	δ.	α.	γ.	m.
94,5	0,204	0,003	0,014	0,785	0,01	0,80	0,19	1,00
90	0,389	0,009	0,0285	0,602	0,03	0,63	5,36	0,96
85	0,617	0,022	0,085	0,398	0,10	0,44	0,53	0,94
80	0,875	0,040	0,12	0,215	0,14	0,25	0,71	0,98
75	1,166	0,065	0,165	0,113	0,21	0,14	0,79	1,11
70	1,499	0,09	0,205	0,051	0,28	0,07	0,84	1,34
65	1,885	0,12	0,251	0,019	0,34	0,03	0,85	1,67

On constate que m est bien trouvé égal à 1 avec une bonne précision entre 100 et 75 %. L'hypothèse du monohydrate en solution concentrée se trouve ainsi confirmée. Dans la formulation I, on a supposé que l'ion NO_3^- ne fixe pas d'eau; s'il en était autrement les calculs ne seraient pas affectés, étant donné qu'entre 75 et 100 % l'ionisation demeure très faible. En dessous de 75 %, l'ionisation ainsi que l'eau libre (décelée par la tension partielle de vapeur) deviennent notables, m n'est plus constant et croît avec la dilution, soit qu'il existe alors des hydrates à plus de 1 molécule d'eau, soit que les ions NO_3^- captent alors un certain nombre de molécules H_2O.

La formulation I, jointe aux valeurs de α, β, γ, δ du tableau donne la composition particulaire des acides nitriques entre 75 et 100 % de concentration. Dans un prochain *Compte rendu* on en montrera l'application au problème du pouvoir nitrant de ces acides sur la cellulose.

ÉLECTROCHIMIE. — *Échange entre une lame de cuivre marqué par du radiocuivre et une solution d'ions cuivriques.* Note (*) de Mlle **Marguerite Quintin**, M. **Pierre Sue** et Mlle **Marie Bizouard**, présentée par M. Frédéric Joliot.

L'échange entre les atomes d'un métal et les ions correspondants en solution aqueuse n'a fait jusqu'à maintenant l'objet que de quelques travaux : Hevesy ([1]),

---

([4]) J. Chédin, *Ann. Chimie*, **11**, 1937, p. 243.
([5]) *Mém. Serv. Chim. de l'État*, **29**, 1943, p. 141.
([6]) O. Redlich et Bigeleisen, *Journ. Chem. Soc.*, **65**, 1943, p. 1883.
([7]) *Transact. of the Faraday Society*, **36**, 1940, p. 356.

(*) Séance du 3 mai 1948.
([1]) *Phy. Z.*, **16**, 1915, p. 52; *Soc.*, **62**, 1940, p. 86.

système $Pb/Pb(NO_3)_2$; Rollin (²), radioargent en présence de diverses solutions.

Nous avons entrepris l'étude des échanges sur le couple radiocuivre, solutions cuivriques.

Le radiocuivre ${}^{64}_{29}Cu$ de période 12,8 a été préparé par irradiation aux deutons du cyclotron du Collège de France, suivant la réaction ${}^{63}_{29}Cu(d, p){}^{64}_{29}Cu$. Après l'irradiation, la lame de cuivre est fondue sous vide pour avoir un métal d'activité spécifique homogène. Celle-ci est déterminée en dissolvant une masse connue du cuivre et en mesurant l'activité de la solution.

La surface est traitée de façons diverses : laminage à froid, suivi de lavages à différents solvants (alcool, éther, benzène, eau ou acide nitrique) ou polissage électrolytique. Dans d'autres cas, le radiocuivre est transformé en sulfate, à partir duquel un dépôt électrolytique est fait sur platine.

Les solutions sont préparées à partir de sulfate de cuivre recristallisé, par dilution d'une solution mère (³) 0,5 M(pH 4,5).

La lame, agitée par rotation autour de son axe, est placée, en récipient fermé, dans un volume V de solution à $20° \pm 0°,1$.

En prélevant un faible volume de la solution, l'activité x passée en solution au temps t (variant de 15 minutes à 80 heures) est mesurée et ramenée au volume initial et au temps origine.

Quels que soient l'état de surface de la lame et la concentration de la solution, les courbes activité-temps ont toutes la même allure exponentielle, ou en intégrant

$$\log \frac{x_\infty - x}{x_\infty} = 0,434\, kt.$$

La figure 1 représente, à titre d'exemple, les résultats de trois expériences. x_∞ dépend beaucoup de la concentration et du traitement de la lame et k n'en dépend que peu.

Nous retrouvons la relation régissant de nombreux processus physico-chimiques (vaporisation, sublimation, dissolution, etc.) et qui a été donnée par F. Joliot (⁴) dans le phénomène inverse de dépôt du polonium sur une électrode.

En outre, nous avons traduit les activités passées en solution à l'équilibre par le nombre de couches atomiques qui interviendraient en moyenne dans le processus.

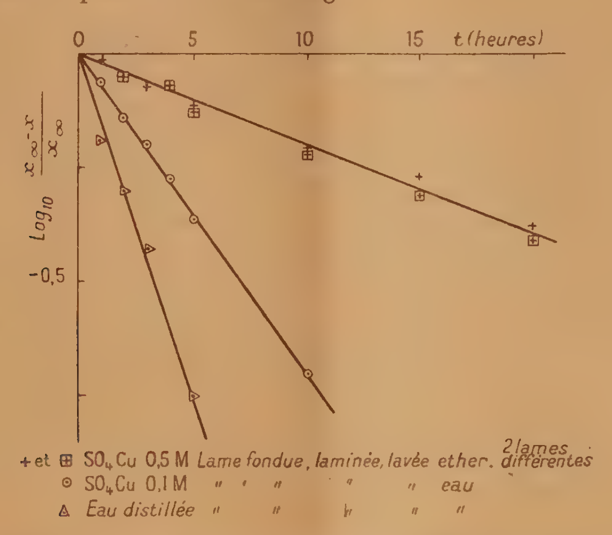
(²) *J. Am. Chem. Soc.*, **62**, 1940, p. 86.

(³) Étant donnée la variation de l'hydrolyse avec la dilution, elles ne sont donc pas toutes au même pH.

(⁴) *J. Chim. phys.*, **27**, 1930, p. 119.

Solution.	SO_4Cu 0,101 M.				SO_4Cu 0,02 M.
Lame.............	laminée	laminée	laminée	dépôt électrol.	laminée
Traitée............	eau	alcool éther	NO_3H	eau	poli électrol.
Nombre de couches.	~ 500	~ 700	~ 3000	~ 17000	~ 1 000

Ces résultats préliminaires montrent le rôle prépondérant que joue l'état de la surface dans les phénomènes d'échange.



La connaissance des épaisseurs de métal affectées par l'échange doit permettre de prévoir le rôle profond de la structure superficielle, facteur important dans les études métallographiques.

CHIMIE THÉORIQUE. — *Structure électronique et forces acide et basique des groupes : 1° pyrrole, indole, carbazole et 2° aniline, diphénylamine, triphénylamine.* Note (*) de MM. **Gaston Berthier** et **Bernard Pullman**.

L'intervention de la théorie de la résonance dans l'interprétation de la force acide et basique des composés non saturés peut prendre deux aspects, en apparence différents, mais qui, au fond, sont en général équivalents [1] : *a.* elle fait intervenir les variations de l'énergie de résonance entre la forme neutre et la forme ionique ; *b.* elle ramène le phénomène à un effet électrostatique de répulsion ou d'attraction des charges. Ainsi, par exemple, le faible caractère basique de l'aniline ou du pyrrole peut être attribué soit au fait que

(*) Séance du 10 mai 1948.

(1) *Voir* par exemple G. W. Wheland, *The theory of resonance*, N. Y., 1944, p. 167 et suivantes.

la résonance du doublet libre de l'azote avec la périphérie moléculaire, résonance qui ne peut exister que dans la molécule neutre, stabilise cette molécule au détriment de l'ion anilinium (dans lequel ce doublet est employé pour la formation de la nouvelle liaison N—H), soit au fait que la résonance de ce doublet libre crée une charge positive sur l'azote et diminue ainsi la probabilité de fixation d'un proton.

Ces deux modes de raisonnement conduisent en général aux mêmes résultats et leur application *qualitative* aux groupes étudiés ici, dans lesquels *le nombre* de formules conjuguées, traduisant l'effet de l'azote, croît avec l'augmentation de la taille moléculaire, suggère une évolution parallèle des forces acide et basique dans ces deux catégories ([1]).

Toutefois une étude *quantitative* de l'évolution de la conjugaison de l'azote avec le reste de la molécule indique que cette évolution prend *deux aspects tout à fait opposés* dans ces deux séries de corps. Des calculs récents de Longuet-Higgins et de Coulson ([2]) ont montré que dans la série du pyrrole la délocalisation du doublet libre de l'azote *diminue* avec l'augmentation de la périphérie moléculaire et que la charge résiduelle sur l'hétéroatome est de 1,692 e dans le pyrrole, de 1,742 e dans l'indole et de 1,782 e dans le carbazole. Ce résultat est d'ailleurs en accord avec notre conception générale de l'évolution de la conjugaison dans les systèmes comportant la soudure d'un noyau pentagonal au noyau benzénique et la présence en α par rapport au cycle hexagonal d'un doublet capable de participer à la résonance de l'ensemble ([3]) ([4]).

0,999₀ 1,025
1,021 1,022 — NH₂
1,909
Aniline

0,999₃ 1,020
1,019 1,032 — NH—Ph
1,822
Diphénylamine

0,999₆ 1,015
1,016 1,040 — N (Ph)(Ph)
1,745
Triphénylamine

Diagrammes des charges

0,345 0,372
0,663 0,672 0,636
0,354 0,111 — NH₂
0,297
Aniline

0,345 0,374
0,662 0,673 0,633
0,356 0,113 — NH—Ph
0,301
Diphénylamine

0,344 0,375
0,662 0,674 0,631
0,356 0,117 — N (Ph)(Ph)
0,301
Triphénylamine

Diagrammes des indices de liaison et de valence libre

D'autre part, nous avons effectué des calculs analogues (à l'aide des coefficients identiques) pour la série de l'aniline et les résultats sont présentés sur la figure ci-dessus :

([2]) *Trans. Far. Soc.*, **43**, 1947, p. 87.

([3]) A. Pullman, B. Pullman et P. Rumpf, *Bull. Soc. Chim.*, **15**, 1948, p. 280.

([4]) A. et B. Pullman, *Colloque International sur la Théorie de la Liaison Chimique*, Paris, avril 1948 (*J. de Chimie Physique*, sous presse).

On constate que dans cette série la conjugaison de l'azote avec le reste de la molécule *croît* avec l'augmentation de la périphérie et qu'en conséquence la charge résiduelle sur l'hétéroatome décroît dans les mêmes conditions. Les deux modes d'interprétation de l'évolution des forces basique et acide ne conduisent donc pas dans le cas examiné ici aux mêmes conclusions : l'intervention de l'effet électrostatique laisse prévoir *une évolution inverse* des constantes correspondantes dans ces deux séries de corps, alors que l'interprétation énergétique suggère *une évolution parallèle*. Rappelons que dans un domaine analogue la décroissance de la force acide dans la série cyclopentadiène, indène, fluorène a été expliquée par une diminution du taux d'hyperconjugaison du groupement méthylénique avec l'agrandissement du cycle ([4]), ([5]).

Du point de vue expérimental seules les constantes caractéristiques de la série de l'aniline semblent connues avec précision. Elles indiquent par exemple que conformément à ce que l'on pouvait espérer, aussi bien d'après les considérations énergétiques que par les considérations électroniques, la diphénylamine est plus acide et moins basique que l'aniline ([6]). Dans la série du pyrrole seules les constantes du monocycle paraissent avoir été déterminées. Étant donnée l'opposition des facteurs énergétiques et électroniques dans cette série de corps, il serait intéressant de déterminer avec précision les forces acide et basique des homologues supérieurs du pyrrole.

CHIMIE ANALYTIQUE. — *Dosage entièrement automatique de quelques alliages d'argent et de cuivre.* Note (*) de Mlle **Simonne Peltier** et M. **Clément Duval**, présentée par M. Louis Hackspill.

Les expériences de pyrolyse que nous avons effectuées avec la thermobalance de Chevenard permettent de faire l'analyse quantitative d'un alliage argent-cuivre sans le peser et sans séparer ses constituants. Le dosage revient à mesurer deux longueurs sur un papier photographique :

a. Si l'on inscrit la courbe de perte de poids du nitrate d'argent sec et cristallisé, on observe (*fig.* 1) un palier horizontal jusqu'à 342°, une légère perte de poids jusqu'à 473°, une brusque décomposition jusqu'à 608°, une descente beaucoup plus lente de 608 à 811°. A partir de cette température, le poids reste de nouveau constant (argent pur).

b. En répétant la même opération avec le nitrate de cuivre $(NO_3)_2Cu.6H_2O$, l'aspect de la courbe (*fig.* 2) est tout différent; il se dégage de l'eau et des oxydes de l'azote dès 58°. De 148 à 200°, on observe un palier horizontal, zone d'existence d'un azotate basique étudié plus bas. Puis, de 200 à 607°, celui-ci se

---

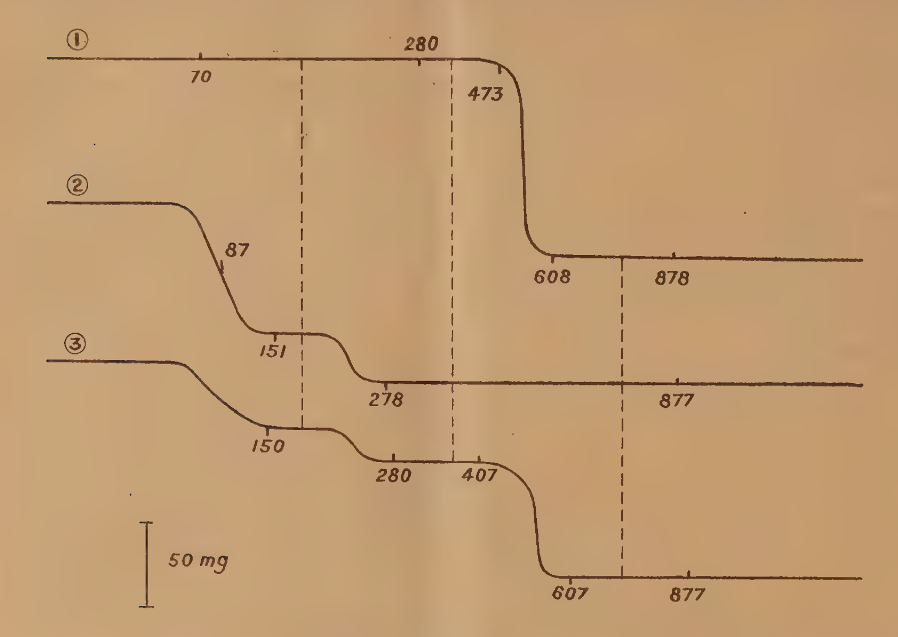
([5]) B. Pullman et G. Berthier, *Bull. Soc. Chim.*, 15, 1948, p. 551.

([6]) *Voir* par exemple W. K. Mc Ewen, *J. Amer. Chem. Soc.*, 58, 1936, p. 1124.

(*) Séance du 18 mai 1948.

décompose à son tour, brusquement jusqu'à 252°, plus lentement ensuite. Le résidu est l'oxyde cuivrique, chauffé à poids constant jusqu'à 944° seulement.

La thermobalance fonctionnant en thermostat, pendant plusieurs heures à



175° ± 0°,5, nous avons maintenu une certaine quantité de nitrate de cuivre initial. Le sel basique formé est vert et cristallisé. Un calcul très simple exécuté sur le graphique (*fig.* 2) nous indique que son poids moléculaire est voisin de 381. Ce sel est intantanément soluble dans l'acide sulfurique et l'électrolyse indique Cu %, 50 (calculé, 49,83 %). Le dosage de l'azote par gravimétrie au nitron fournit, d'autre part, NO_3 %, 32,21 (calculé, 32,40 %). Ces nombres s'accordent avec la formule prévue pour le nouveau nitrate basique $(NO_3)_2Cu.2(HO)_2Cu = 382,76$.

c. Si l'on place maintenant dans le creuset des mélanges intimes de nitrates de cuivre et d'argent, la courbe inscrite (*fig.* 3) est une résultante des deux précédentes. Le palier relatif au nitrate basique est toutefois moins bien marqué. De 280° à 400° on observe un dépôt à poids constant ($NO_3Ag + CuO$) tandis qu'à partir de 529°, nous avons affaire au mélange Ag + CuO.

Ces résultats nous suggèrent le mode opératoire suivant [il pourra être utile de se reporter à deux Notes précédentes de l'un de nous ([1])]. Sur l'anneau de la thermobalance, on dispose un creuset vide, non pesé, mais calciné préalablement à 800°. On s'arrange pour que le spot trace au bas du papier, pendant

(1) Clément Duval, *Comptes rendus*, **224**, 1947, p. 1824; *Ibid.*, **226**, 1948, p. 1276.

5 minutes, un trait horizontal, puis pendant les 5 minutes suivantes, un autre trait parallèle au premier, correspondant à la surcharge habituelle de 50^{mg}. Celle-ci est alors remplacée par le fragment d'alliage étudié et non pesé. La nouvelle parallèle tracée est à une distance de la première qui donnera immédiatement la somme Cu + Ag. Ceci fait, le creuset est porté, avec l'alliage et quelques gouttes d'acide azotique étendu, sur le bain de sable à 80°. L'attaque, la reprise par l'eau, l'évaporation à sec durent un quart d'heure. Le creuset étant remis sur son anneau, on fait tracer au spot une courbe analogue à celle de la figure 3. Rappelons que l'on peut obtenir, avec un bon réglage et un papier convenable, des traits ayant une épaisseur de 1/10 de millimètre. La différence entre les hauteurs des deux derniers paliers donne la quantité NO_3 combinée à l'argent, d'où l'on tire le poids de cet argent, et, par suite, celui du cuivre, par différence. L'opération dure une heure et demie. L'erreur relative sur les poids d'argent et de cuivre est assez constante et vaut 1/300 par défaut. Le calcul d'erreur montre qu'il est difficile d'obtenir mieux avec la thermobalance de Chevenard sous sa forme actuelle.

Voici quelques résultats d'analyse comparés, sur les mêmes échantillons, à ceux que donne la méthode de Gay-Lussac :

Poids analysé.	Thermobalance.	Méthode de Gay-Lussac.
mg	mg	mg
140,50	124,55	125,11
182,30	144,88	145,20
214,10	170,03	170,53
133,33	111,40	111,89

Au cours de ce dosage, nous avons supprimé les opérations suivantes : pesée de l'échantillon, reprise par l'eau après destruction du nitrate de cuivre, filtration du nitrate d'argent, dosage gravimétrique de l'argent en chlorure (2 pesées), reprise de l'oxyde de cuivre par l'acide sulfurique, électrolyse (2 pesées). La méthode n'a pas, cependant, la prétention de rivaliser avec celle de Gay-Lussac effectuée en série, par un personnel entraîné, utilisant un stock considérable de liqueur titrée. Elle devient avantageuse, cependant, si le chimiste a une seule analyse d'alliage à effectuer et s'il veut conserver un document sur lequel il pourra faire des lectures à loisir.

CHIMIE MINÉRALE. — *Étude sur la stabilisation de la zircone.* Note (*) de M. **Jacques Pierrey**, présentée par M. Paul Lebeau.

La zircone ZrO_2 chauffée à 1000° C. subit une très forte contraction due au passage de la forme monoclinique à la forme quadratique. Cette transformation

(*) Séance du 19 mai 1948.

confère aux objets de zircone pure une extrême fragilité et restreint notablement les possibilités d'emploi de cet oxyde.

Différents auteurs [1] à [5] ont montré que l'addition de petites quantités de certains oxydes (chaux, magnésie, etc.), possédant une structure cristalline cubique et dont le rayon de l'ion métallique est voisin de celui de l'ion zirconium, permet de stabiliser la zircone sous forme cubique.

Je me suis proposé dans ce travail de préciser les pourcentages minima d'oxyde nécessaire pour obtenir cette stabilisation et d'étendre jusqu'à des températures de l'ordre de 2000°C., le contrôle dilatométrique permettant de caractériser les transformations possibles.

J'ai donc préparé un certain nombre de mélanges, contenant de faibles quantités de chaux, de magnésie, de glucine ou d'oxyde de cérium (1, 3, 5 %), cuits à très haute température ou mieux fondus, afin de dissoudre dans la zircone la totalité de l'oxyde susceptible d'entrer en solution solide.

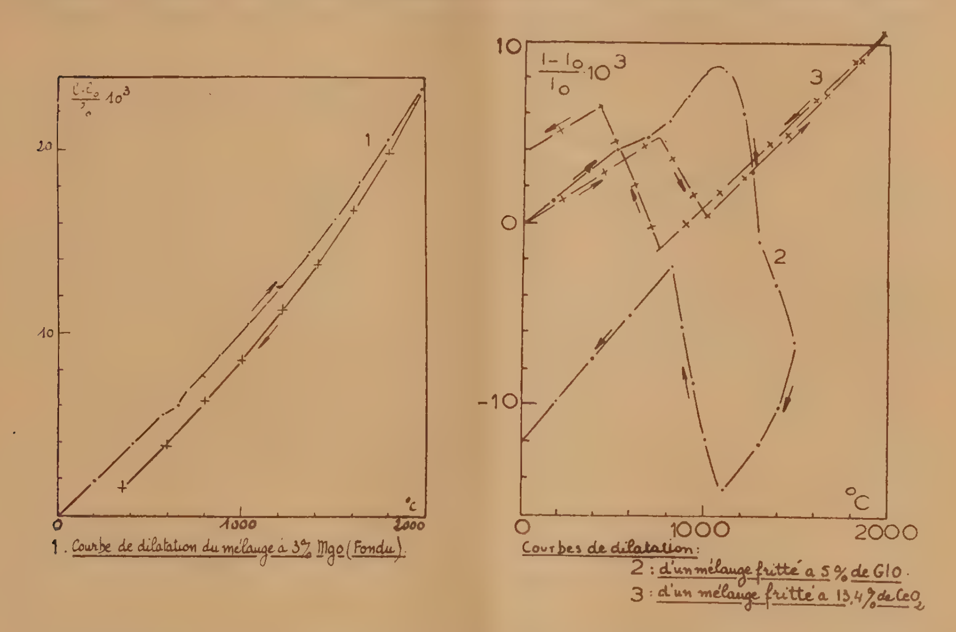
L'étude dilatométrique à très haute température (2000°C.) réalisée par une méthode optique, mise au point au laboratoire et précédemment utilisée pour la mesure de la dilatation du graphite [6], a donné les résultats suivants (Tableau).

TABLEAU.

Oxyde utilisé.	Pourcentage d'oxyde (% en poids).	Nature de l'échantillon.	Coefficient de dilatation (× 10^{-6}).	Observations.
Magnésie	1	Fondu	7,5 (0- 900°C.)	Transf. de ZrO_2 à 900°C.
	3	Fritté à 2200°C.	11,3 (0-1600)	Transf. supprimée
		Fondu	11,9 (0-1800)	Id.
	5	Fritté à 2200°C.	11,3 (0-1600)	Id.
		Fondu	12,4 (0-1900)	Id.
Chaux	1	Fondu	Irrégulier	Transf. à 850°C.
	3	Fritté à 2200°C.	10,7 (20-1400°C.)	Irrégularités vers 1500°C.
		Fondu	10,4 (20-1200)	Transf. supprimée
	5	Fondu	10,9 (20-1200)	Id.
			15,5 (1200-1800)	Id.
Oxyde de glucinium	1	Fritté à 2200°C.	8,3 (0-1000°C.)	Transf. de ZrO_2 à 1050°C.
	3	»	8,4 (»)	» 1095
	5	»	8,2 (»)	» 1090
Oxyde de cérium	2	Fritté à 2200°C.	–	–
	5	»	8,0 (0-950°C.)	Transf. de ZrO_2 à 950°C.
	10	Fritté à 2100°C.	7,3 (0-750)	» 750
	13,4 (10 mol %)	» 2200	6,6 (0-700)	» 700

(1) F. GAMBEY et G. CHAUDRON, *Congrès Chim. Ind.* (14e *Congrès*), Paris, 1934.
(2) *Z. Allgem. Chem.*, **180**, 1929, p. 19.
(3) *J. Res. Nat. Bur. Standards*, **35**, 1945, p. 87.
(4) G. R. POLE, A. M. BEINLICH et N. GILBERT, *J. Am. Ceram. Soc.*, **29**, 1946, p. 208.
(5) *J. Am. Ceram. Soc.*, **30**, 1947, p. 180.
(6) J. PIERREY, *Comptes rendus*, **223**, 1946, p. 501.

Ces résultats montrent que l'on peut supprimer la transformation de la zircone par addition de 3 % de chaux ou de magnésie, à la condition que ces oxydes soient parfaitement mis en solution solide; en particulier, dans mes essais, cette mise en solution solide était obtenue par un traitement à haute température ou même une fusion. A titre d'exemple, nous avons joint les courbes de dilatation de trois mélanges différents. La courbe I (mélange fondu



1. Courbe de dilatation du mélange à 3% MgO (Fondu).

Courbes de dilatation :
2 : d'un mélange fritté à 5% de GlO.
3 : d'un mélange fritté à 13,4% de CeO_2

contenant 3 % de magnésie) ne présente aucune anomalie entre 0 et 2000°C., aussi bien pendant le chauffage qu'au cours du refroidissement. Par contre, les courbes 2 (mélange à 5 % de GlO fritté à 2200°C.), et 3 (mélange à 13,4 % de CeO_2 fritté à 2200°C.), montrent que la transformation de la zircone n'est pas éliminée par ces deux oxydes. Toutefois, la température de cette transformation est nettement abaissée par la présence de l'oxyde de cérium.

C'est sans doute à une température de cuisson insuffisante qu'il faut attribuer les résultats de R. F. Geller et P. J. Yavorsky ([3]), et de C. E. Curtiss ([5]) qui ne réalisaient la stabilisation de la zircone qu'avec des pourcentages de chaux ou de magnésie plus élevés (8 % et 10 % en poids respectivement); par contre, mes expériences confirment celles de O. Ruff et F. Ébert ([2]) et de F. Gambey et G. Chaudron ([1]).

J'ai, en outre, montré que les zircones ainsi stabilisées ne présentent, entre 1200 et 2000°C., aucune anomalie de dilatation caractéristique d'une transformation allotropique.

CHIMIE MINÉRALE. — *Sur l'oxydation catalytique de l'hydrogène arsénié.* Note (*) de MM. **Henri Guérin** et **Jack Bastick**, présentée par M. Paul Lebeau.

L'hydrogène arsénié, pur, stable au contact de l'oxygène sec, à la température ordinaire, est oxydé par cet élément en présence de corps poreux : charbon actif, gel de silice, alumine activée, etc.

La composition des produits d'oxydation est apparemment très variable. Plusieurs réactions sont en effet théoriquement possibles :

(I) $2\,AsH_3 + 3/2\,O_2 = As_2O_3 + 3\,H_2$;

(II) $2\,AsH_3 + 3/2\,O_2 = 2\,As + 3\,OH_2$;

(III) $2\,AsH_3 + 3\,O_2 = As_2O_3 + 3\,OH_2$;

(IV) $2\,AsH_3 + 4\,O_2 = As_2O_5 + 3\,OH_2$.

Afin de déterminer le mécanisme de cette oxydation catalytique, nous avons systématiquement étudié, dans ce premier travail, l'influence de la composition du mélange gazeux et de la nature du catalyseur.

L'appareil utilisé est essentiellement constitué par une ampoule-laboratoire dans laquelle on place 1^g de catalyseur, en relation, d'une part avec un manomètre, une pompe à diffusion et une trompe à mercure, d'autre part avec une burette graduée, utilisée pour préparer et introduire le mélange gazeux.

Sur le catalyseur, préalablement dégazé dans le vide à environ 500°, puis maintenu à la température constante de 0°, on admet un volume déterminé d'un mélange gazeux caractérisé par un rapport : vol. O_2/vol. AsH_3 que nous désignerons par R_i (rapport volumétrique initial) et tel que la pression atteinte lors de l'introduction soit voisine de la pression atmosphérique. Après réalisation de l'équilibre, les gaz résiduaires sont extraits et analysés sur la cuve à mercure afin de calculer le rapport des volumes d'oxygène et d'hydrogène arsénié utilisés : $R_u =$ vol. O_2/vol. AsH_3.

De la connaissance de ce dernier rapport et de la composition des produits solides fixés sur le catalyseur, on peut déduire quelle est la réaction qui a eu lieu.

Nous avons examiné successivement des charbons actifs, un gel de silice et de l'alumine activée.

1° *Charbons de noix de coco* (Acticarbones 1035 et 1045).

Étant donnée l'absence d'hydrogène parmi les produits de la réaction tout se passe comme si la réaction I n'avait jamais eu lieu.

Aux mélanges très riches en hydrogène arsénié, caractérisés par un rapport R_i inférieur à 0,2, correspondent des rapports d'utilisation R_u compris entre 0,4 et 0,6, qui, compte tenu de la faible rétention de l'hydrogène arsénié

(*) Séance du 19 mai 1948.

par le charbon à cette température ($2^{cm^3},2$ par gramme), ne peuvent s'interpréter par l'une des réactions indiquées plus haut. Ils impliquent la formation d'hydrures inférieurs de l'arsenic tels que As_2H_2 et As_4H_2 dont l'existence a été maintes fois signalée et qui résulteraient des réactions :

(V) $2\,AsH_3 + O_2 = As_2H_2 + 2\,OH_2$;

(VI) $4\,AsH_3 + 5/2\,O_2 = As_4H_2 + 5\,OH_2$.

Ces composés qui ne peuvent être isolés du charbon sont très facilement oxydables par l'oxygène.

Les mélanges pour lesquels le rapport R_i est compris entre 0,4 et 1. donnent presque exclusivement lieu à la formation d'arsenic (réaction II).

De l'anhydride arsénieux accompagné de faibles quantités d'arsenic et d'anhydride arsénique prend naissance à partir des mélanges caractérisés par un rapport R_i compris entre 1 et 2 (réaction III).

Lorsque le rapport initial dépasse 2, le rapport d'utilisation R_u reste compris entre 1,5 et 1,8 comme si l'oxydation de l'anhydride arsénieux en anhydride arsénique n'était jamais complète dans ces conditions.

2° *Alumine activée* (1). — Les essais opérés sur des mélanges dont le rapport R_i variait de 0,2 à 4 ont conduit à des consommations d'oxygène telles que R_u passait de 0,75 à 1,6 : seules les réactions II et III se produisent donc pratiquement. Les hydrures inférieurs ne paraissent pas se former et l'obtention d'anhydride arsénique semble encore plus difficile qu'en présence de charbon.

3° *Gel de silice.* — Quelle que soit la composition du mélange initial (R_i compris entre 0,15 et 6), le rapport des volumes de gaz ayant réagi reste pratiquement le même (R_u voisin de 1,35). Seule la réaction III conduisant à l'anhydride arsénieux s'opère donc pratiquement dans ces conditions; la très faible quantité d'arsenic (1 à 2 %) qui se forme lorsque R_i est inférieur à 1,5 colore la silice en jaune orangé et s'oxyde très facilement par l'oxygène.

La vitesse de la réaction varie toutefois nettement avec la composition des mélanges ; elle paraît maximum lorsque les constituants se trouvent en volumes égaux.

Les résultats obtenus au cours de ce travail dépendent donc essentiellement du catalyseur employé. Nous avons cru devoir rapprocher cette constatation du fait que les courbes d'adsorption de l'hydrogène arsénié sur les charbons actifs et sur la silice ont des allures très différentes, ce qui laisserait supposer qu'il s'agirait d'adsorptions de types distincts. Il nous a paru dès lors nécessaire d'entreprendre l'étude systématique de l'adsorption de l'hydrogène arsénié sur les divers produits poreux en fonction de la température.

---

(1) H. Thibon, A. Maillard et L. Savon, *Chimie et Industrie*, 57, 1947, p. 117-125.

CHIMIE ORGANIQUE. — *Sur quelques propriétés des alcools β-éthyléniques primaires.* Note (*) de M. **Henri Normant**, présentée par M. Marcel Delépine.

Dans ses recherches sur le butène-3 *ol*-1, Pariselle a signalé, en dehors des réactions normales de la liaison double et de l'hydroxyle, plusieurs cas de cyclisation en composés furanniques. La mise au point d'un mode de préparation des alcools homologues $R.CH{=}CH.CH_2CH_2OH$ ([1]) a permis la généralisation d'une étude restée limitée au premier terme.

Par chauffage avec PO_4H_3 à 85 % ces alcools s'isomérisent en *α-alcoyl-tétrahydrofurannes* (Rdt 65-70 %)

$$R.CH{=}CH.CH_2CH_2OH \rightarrow \underbrace{R.CH.CH_2.CH_2.CH_2}_{O}$$

déjà connus et préparés avec $R{=}C_2H_5$, $n.C_3H_7$, $n.C_4H_9$. Le réarrangement du *cinnamylcarbinol* est encore plus aisé. Avec SO_4H_2 à 30 % bouillant il se forme du *phényl-2 tétrahydrofuranne* ($C_{10}H_{12}O$) $É_{14}$ 105°; d_{15} 1,037.

Les dibromhydrines de ces alcools, moins stables que celle du buténol ([2]) ne peuvent être distillées sans décomposition. La perte de BrH se traduit par la formation d'une liaison éthylénique et une cyclisation :

$$R.CHBr.CHBr.CH_2.CH_2OH \rightarrow \begin{cases} R.CBr{=}CH.CH_2.CH_2OH & (a) \\ \underbrace{R.CH.CHBr.CH_2.CH_2}_{O} & (b) \end{cases}$$

Avec la pyridine, le taux de la réaction (*b*) est de 40-60 % ; avec NH_2Na, dans l'éther, il tombe à 20 %, tandis que celui de la réaction (*a*) s'élève à 50 %. Ont été obtenus : *Éthyl-2 bromo-3 tétrahydrofuranne* ($R = C_2H_5$ ou $C_6H_{11}OBr$) $É_{14}$ 56°; d_{15} 1,338; *n.butyl-2 bromo-3 tétrahydrofuranne* ($R = n.C_4H_9$ ou $C_8H_{15}OBr$) $É_{13}$ 93-94°; d_{16} 1,264.

La diéthylamine, à chaud, enlève BrH à ces corps. Il se forme un mélange de dihydrofurannes ([3])

$$\underbrace{R.CH{-}CH{=}CH{-}CH_2}_{O} \qquad \underbrace{R{-}C{=}CH{-}CH_2{-}CH_2}_{O}$$

Éthyl-2 dihydrofuranne, $R = C_2H_5(C_6H_{10}O)$, É 105°; d_{10} 0,893; *n.butyl-2 dihydrofuranne*, $R = nC_4H_9(C_8H_{14}O)$, É 157°; d_{16} 0,879.

Les acétines des dibromhydrines, bien que plus stables, n'ont pas permis

(*) Séance du 19 mai 1948.

(1) H. Normant, *Comptes rendus*, 226, 1948, p. 733.

(2) Pariselle, *Ann. de Chimie*, 13, 1911, p. 315.

(3) H. Normant, Travaux en cours.

cependant de passer aux triols dans les conditions où buténol ([2]) et penténol ([4]) fournissent de tels dérivés.

L'acétoxy-1 dibromo-3.4 hexane (É$_{13}$ 143-144°; d_{15} 1,515) chauffé avec CH_3—COOK en milieu acétique réagit mal à 120° et perd BrH à 140° en donnant *l'acétoxy-1 bromo-4 hexène-3* (Rdt 50 %) : É$_{12}$ 102-103°; d_{14} 1,289. Ce dernier, sous l'action de HOK alcoolique conduit au *bromo-4 hexène-3 ol-1* (45 %), É$_{12}$ 99-100°; d_{13} 1,365 et à l'*hexyne-3 ol-1* (40 %) dont les constantes É$_{11,5}$ 64-65°; d_{14} 0,902 diffèrent très peu de celles déjà publiées ([5]).

Les alcools β-éthyléniques, contrairement encore au buténol et au penténol, donnent lieu à deux réactions, par traitement avec BrH vers 110°

$$R.CH{=}CH.CH_2CH_2OH \begin{cases} \rightarrow R.CH{=}CH.CH_2CH_2Br \\ \rightarrow R.CHBr.CH_2CH_2CH_2Br \end{cases}$$

Les taux en sont respectivement de 15-20 % et 75-60 %. Les esters bromhydriques suivants ont été isolés : *bromo-1 hexène-3* ($C_6H_{11}Br$) É$_{12}$ 44-45°; d_{15} 1,212, déjà connu ([6]); *bromo-1 heptène-3* ($C_7H_{13}Br$) É$_{12}$ 60-61°; d_{16} 1,176; *bromo-1 octène-3* ($C_8H_{15}Br$) É$_{12}$ 78-79°; d_{16} 1,139.

La condensation de leurs dérivés magnésiens avec l'isocyanate de phényle permet une identification commode des acides γ-éthyléniques. On a préparé les *anilides* des acides suivants : *heptène-3 oïque-1* F 87°; *octène-3 oïque-1* F 100°; *nonène-3 oïque-1* F 95°. Quant aux dibromures, ils semblent formés principalement des composés 1-4 comme le montrent leurs constantes très proches des valeurs connues : *dibromo-1.4 hexane* É$_{12}$ 97-98°; d_{16} 1,566; *dibromo-1.4 heptane* É$_{11,5}$ 111-112°; d_{17} 1,512 ([7]); *dibromo-1.4 octane* É$_{11}$ 125-126°; d_{15} 1,462 ([7]).

Au surplus, le dibromohexane réagit sur la pipéridine en donnant un sel F 270° qui a déjà été obtenu à partir du dibromure-1.4 ([8]). Enfin ces dibromures, sous l'action des amines primaires, sont cyclisés en pyrrolidines (Rdt 75 %)



Phényl-1 éthyl-2 pyrrolidine (R'=C_6H_5; R=C_2H_5 ou $C_{12}H_{17}N$) É$_{11}$ 130-131°; d_7 1,000; picrate F 123°; *phényl-1 n.propyl-2 pyrrolidine* ($C_{13}H_{19}N$);

([4]) R. Paul, *Thèses*, Paris, 1932, p. 45.

([5]) Stoll et Rouvé, *Helv. chim. Acta*, 21, 1938, p. 1542.

([6]) Treff et Werner, *Ber. deuts. chem. Ges.*, 68, 1935, p. 640.

([7]) R. Paul, *Bull. Soc. Chim.*, 5, 1938, p. 1061.

([8]) Van Romburgh, *Konin. Ak. Van Wetensch*, Amsterdam, 25, 1922, p. 4.

$\acute{E}_{13}$ 146-147°; d_{14} 0,974; picrate F 142°; *phényl-1 n.butyl-2 pyrrolidine* ($C_{14}H_{21}N$); $\acute{E}_{13}$ 156-157°; d_{15} 0,960; picrate F 153°; *hydroxyéthyl-1 éthyl-2 pyrrolidine* ($R' = CH_2.CH_2OH$ ou $C_8H_{17}ON$) Rdt faible, $\acute{E}_{12}$ 91-92°; d_{13} 0,953 dont le benzoate fournit un picrate F 106°.

Dans ces condensations il se forme, en outre, de faibles quantités de diamines linéaires, tandis que les dibromures primaires $Br(CH_2)_nBr$ ($n = 4$ et 5) n'ont donné à Schotten que des bases cycliques. On a pu isoler le *di-(phénylamino)-1.4 heptane* ($C_{19}H_{26}N_2$)

$$\begin{array}{l} n.C_3H_7.CH.(CH_2)^3.NH.C_6H_5 \\ \qquad\quad | \\ \qquad NH.C_6H_5 \end{array}$$

huile épaisse, à peine colorée, à belle fluorescence violette et bouillant à 250-255° sous 15^{mm}.

CHIMIE ORGANIQUE. — *Sels de pyridiniums normaux et anormaux dérivés de l'acide et de l'amide nicotiques.* Note de MM. **Jean-Albert Gautier** et **Jean Renault**, présentée par M. Marcel Delépine.

La combinaison des halogénures d'alcoyles XR avec l'acide nicotique paraît *a priori* devoir conduire aux sels de pyridiniums de constitution (I).

Pourtant l'un de nous a fait connaître, avec E. Leroi [1], l'existence, dans la série des *bis*-pyridiniums β-carboxylés, de sels présentant la constitution de sels *basiques* : ils contiennent un seul atome d'halogène et un seul carboxyle libre, et l'une des fonctions azotées y est engagée dans une liaison bétaïnique avec le second groupement carboxylé. Les modalités de la formation de ces composés anormaux montrent l'influence de la nature de la chaîne substituante à l'azote sur la genèse respective des sels *normaux* et *basiques* [2].

On pouvait se demander si pareille anomalie s'étendait à la série des mono-pyridiniums 3-carboxylés, c'est-à-dire s'il existait des sels de constitution (II), résultant de l'élimination spontanée d'une molécule d'hydracide XH entre deux molécules du sel normal attendu. Cette question se posait d'autant plus que Turnau [3] avait déjà rencontré des sels basiques de pyridiniums dérivés des acides pyridine-2 et 4 carboniques, alors que l'acide nicotique n'avait conduit entre ses mains qu'à des sels normaux tels que (I).

Ces considérations nous ont amenés à étudier systématiquement sous cet aspect la formation des sels d'alcoyl-carboxy-3 pyridiniums. Comme dans les recherches relatives aux *bis*-pyridiniums, nous avons choisi comme matière première les sels quaternaires de l'amide nicotique; ces composés sont

(1) *Comptes rendus*, **216**, 1943, p. 669.

(2) J.-A. Gautier et E. Leroi, *Comptes rendus*, **218**, 1944, p. 200.

(3) *Monatsh für Chem.*, **26**, 1905, p. 537.

facilement accessibles par addition d'une molécule des différents halogénures d'alcoyles sur l'atome d'azote nucléaire de l'amide et présentent la constitution normale attendue [formule (I), en remplaçant CO_2H par $CONH_2$]. Nous les

(I). (II).

avons transformés en sels quaternaires de l'acide, en substituant, par hydrolyse acide, un groupement carboxylé à la fonction amidée située en β.

Nous avons isolé ainsi tout d'abord la série des sels d'alcoyl-carboxy-3 pyridiniums correspondant aux restes gras alcoylés de C_1 (R = Méthyle) à C_7 (R = heptyle). *Tous ont montré à l'analyse la constitution d'un sel normal* (I). Par contre, les résultats ont été opposés avec d'autres sels dont le reste alcoylé fixé à l'azote se trouve alourdi par un noyau aromatique : l'hydrolyse du bromobenzylate et du bromophényl-éthylate de l'amide nous a conduits à des sels quaternaires de l'acide nicotique *présentant la constitution de sels basiques* [formule (II), avec $R = CH_2 - C_6H_5$ et $R = CH_2 - CH_2 - C_6H_5$].

Il apparaît donc qu'à l'acide nicotique correspondent des sels quaternaires à structure normale, quand ils sont purement alcoylés, ce qui confirme les conclusions de Turnau; tandis que ses dérivés phénylalcoylés affectent plutôt la constitution de sels basiques. Comme dans la série des *bis*-pyridiniums, on retrouve ici l'influence du reste substituant à l'azote. On peut espérer qu'à la faveur d'autres investigations du même ordre, on verra enfin se dessiner certaines lois touchant la formation, présentement peu explicable, des sels anormaux de bétaïnes.

Description des sels quaternaires isolés. — La description des composés isolés, nouveaux pour la plupart, sera détaillée dans un autre Recueil; nous la résumons ci-après.

1° *Dérivés de l'amide.* — Iodométhylate (déjà préparé par Karrer) [4] : — Rdt 76 %, F 202°; bromométhylate, Rdt 90 % (préparé à partir du précédent), F 218°; iodoéthylate, Rdt 70 %, F 189°; bromoéthylate, Rdt 90 %, F 205°; bromo- *n*-propylate, Rdt 70 %, F 172°; bromo-*n*-butylate (triboluminescent), F 142°; iodoisoamylate, Rdt 75 %, F 162°; bromoisoamylate, Rdt 70 %, F 225°; bromo- *n*-heptylate, Rdt 85 %, F 203°;

---

(4) Karrer et Warburg, *Biochem. Zeits.*, 285, 1936, p. 297.

chlorobenzylate, Rdt 65 %, F 230°; bromobenzylate, Rdt 70 %, F 205°; bromophényléthylate [déjà préparé ([5])], Rdt 80 %, F 206°.

2° *Dérivés de l'acide à structure normale* (I). — Les chloro- et iodo-méthylates (sels de la trigonelline) sont connus; bromo-méthylate, Rdt 70 %, F 227°; bromoéthylate, Rdt 64 %, F 187°; bromo- *n*-propylate, Rdt 75 %, F 111°; bromo- *n*-butylate, Rdt 60 %, F 91° (avec $1 OH_2$); bromoisoamylate, Rdt 50 %, F 182°; bromo- *n*-heptylate, Rdt 80 %, F 156°.

3° *Dérivés de l'acide à structure basique* (II). — Chlorobenzylate, F 204-206° (avec $1 OH_2$); bromobenzylate, Rdt 70 %, F 197° (avec $1 OH_2$); bromophényléthylate, Rdt 87 %, F 218°.

CHIMIE ORGANIQUE. — *Halochromie en série anthracénique. Diquinolmésodiphénylanthracénique diméthylaminé en 2. Comparaison avec le p-diméthylaminotriphénylcarbinol. Influence de la concentration en acide.* Note (*) de M. **Jacques Robert**, présentée par M. Charles Dufraisse.

Le diquinolmésodiphénylanthracénique diméthylaminé en 2 (I) donne avec les acides une coloration rouge intense. Allais, qui a signalé ce phénomène pour la première fois ([1]), l'a attribué au sel d'une structure imonium (II), tout à fait comparable à celle du diméthylfuchsonimonium (IV), mis à part le pont phénylcarbinolique reliant en ortho deux phényles chez l'anthracène. Je me suis proposé d'établir le bien-fondé de cette supposition par des mesures spectrographiques.

Elles ont porté en parallèle sur les bases libres : amine dihydroxydihydroanthracénique (I) et *p*-diméthylaminotriphénylcarbinol (III) d'une part, et sur leurs sels chlorhydriques d'autre part ; elles sont résumées dans les graphiques 1, 2 et 3.

Il existe une frappante analogie entre les spectres triphénylméthaniques et dihydroanthracéniques. Les bases libres ont chacune, dans la région 2600 Å, une bande correspondant à l'absorption de noyaux benzéniques indépendants (*fig.* 1). La chlorhydratation fait apparaître dans le spectre visible, avec l'un et l'autre corps, la même bande, à un léger décalage près (sommets respectivement, à 4700 et 4870 Å). Les deux chlorhydrates ont, en outre, la même bande ultraviolette à 2600 Å, située à peu près comme celles des bases libres. Le sel triphénylméthanique manifeste un maximum supplémentaire d'absorption, peu accusé, vers 3500 Å.

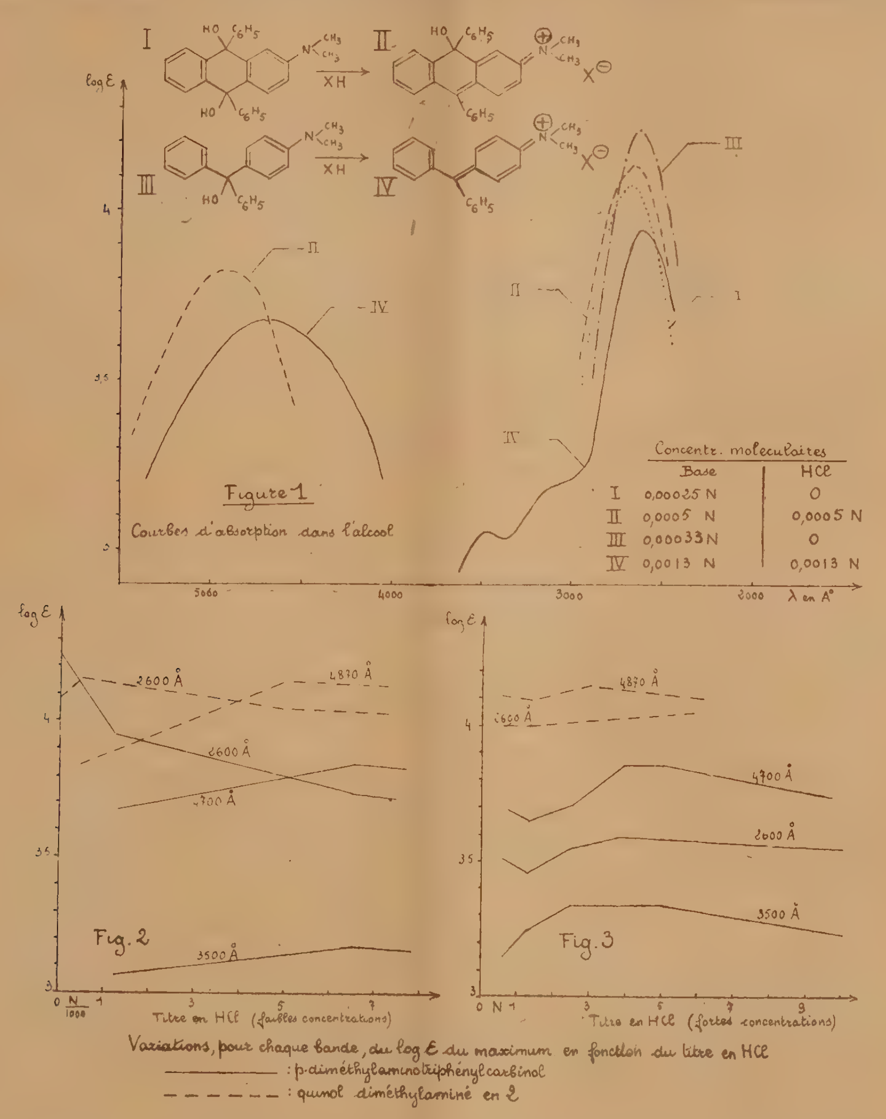
Les courbes des chlorhydrates, reproduites figure 1, correspondent à l'addition d'une seule molécule d'acide chlorhydrique aux solutions des bases dans

([5]) Sugasawa, Sakurai et Okayama, *Ber. deuts. Chem. Ges.*, 74 B, 1941, p. 537.

(*) Séance du 10 mai 1948.

([1]) A. Allais, *Thèse*, Paris, 1945; *Ann. Chim.* (12), 2, 1947, p. 770.

l'alcool éthylique. La force de ces bases n'est pas assez grande pour donner à penser que la salification ait été intégrale; une fraction devait y avoir échappé. En conséquence, l'addition d'acide en excès devait hausser le maximum de la



bande visible et, au contraire, abaisser celui de la bande 2600 Å, dans laquelle se confondent les absorptions de la base libre et celles des noyaux benzéniques indépendants de la forme colorée. C'est effectivement ce que j'ai constaté. Quelques molécules supplémentaires d'acide remontent les maxima de la bande visible et refoulent ceux de la bande ultraviolette. Mais si l'on continue

à ajouter de l'acide, avec l'espoir d'atteindre un plafond, on observe de curieuses oscillations des intensités, comme le montrent les graphiques 2 et 3, où sont portées les variations des hauteurs des maxima en fonction de la teneur en acide. Ce phénomène est assez complexe, sans doute parce que le solvant doit y intervenir, bien que les spectres aient été pris très rapidement après la dissolution, en vue justement d'éviter l'influence de réactions secondaires plus lentes que la salification.

Plus facile à interpréter est la rétrogradation de la forme colorée qui semble se dessiner quand on augmente beaucoup la concentration en acide, comme on l'a fait pour le carbinol. Il doit y avoir sans doute retour à la forme carbinolique ou plutôt à son éther chlorhydrique; ce serait l'analogue, *mutatis mutandis*, de la rétrogradation de la couleur des fuchsones par un excès d'alcali.

En résumé, le comportement spectrographique de la base anthracénique I, libre ou salifiée, est entièrement analogue à celui du *p*-diméthylaminotriphénylcarbinol III. Il est donc justifié d'attribuer au sel anthracénique coloré la formule II qui en fait un sel de fuchsonimonium cyclisé, le premier signalé, à ma connaissance, dans la série anthracénique.

GÉOLOGIE. — *Observations géologiques dans la région de Diamantina, Minas Gerais (Brésil).* Note de M. **Boris Brajnikov.**

Cette région est située dans la partie nord de l'état de Minas Gerais, sur la chaîne dorsale de l'Est brésilien, dénommée par O. Derby, *Serra do Espinhaço*, mais portant également plusieurs noms locaux. Peuplée d'abord par les chercheurs d'or, la région a vu changer son nom et son industrie avec la découverte du diamant, vers le début du XVIIIe siècle.

Du point de vue pétrographique, la région est constituée par une alternance de phyllades et de grès-quartzites; au-dessus, on rencontre, en taches isolées, conglomérat, à éléments souvent très grossiers principalement formés des grès sous-jacents, mais parmi lesquels on a reconnu quelques galets de roches les un plus diverses dont on ignore en partie la provenance. Des actions métamorphiques ultérieures ont donné lieu à la formation, dans le ciment, d'une grande quantité de minéraux phylliteux, notamment de séricite; parfois la roche acquiert un aspect de gneiss. Par endroits, et surtout à son contact immédiat avec les quartzites sous-jacents, le conglomérat est très dur et compact; dans d'autres endroits, aussi bien le ciment que les galets, sont friables et se désagrègent spontanément.

Quelques pointements de granite traversent les phyllades et envoient leurs apophyses dans les grès-quartzites.

Pour les géologues brésiliens [1], les phyllades et les quartzites représentent

[1] A. I. Oliveira e O. H. Leonardos, *Geologia do Brasil*, Rio de Janeiro, 1943.

l'Algonkien inférieur et moyen; les conglomérats, le faciès fluvio-glaciaire de l'Algonkien supérieur ou du Cambrien. On admet généralement que les phyllades appartiennent à l'Algonkien inférieur (*série Minas*); les quartzites soulèvent, par contre, de grandes difficultés, car les auteurs, qui les ont étudiés, tant dans la région de Diamantina, que dans celle d'Ouro Preto (en particulier O. Derby et B. von Freyberg), ont cru reconnaître que des roches exactement semblables se rencontrent dans la série Minas et dans l'Algonkien moyen (*série Itacolomi*). Il serait pratiquement impossible de les reconnaître les unes des autres. Toutefois, il est convenu de considérer les quartzites comme d'Itacolomi, lorsqu'on y constate la présence de galets (quartz, quartzite, itabirite), ou la stratification entrecroisée; D. Guimarães a également trouvé que le quartzite itacolomien contient sporadiquement du feldspath classique, chose qui ne s'est pas vérifiée pour le quartzite minasien. Malheureusement ces caractères ne sont pas constants; il y aura donc tendance à attribuer les quartzites à la série Minas au détriment d'Itacolomi.

Les quartzites se présentent en bancs d'épaisseur variable, pouvant atteindre plusieurs dizaines de mètres; le plus souvent, mais pas toujours, ils forment les sommets du relief. Ces bancs plongent vers l'Est, le pendage moyen étant de l'ordre de 30 à 35°; parfois on voit le pendage s'aplatir, voire se renverser, mais le pendage ouest n'est jamais fort, ni constant, les bancs de quartzites se redressent et reviennent au plongement est normal. Pour les phyllades, le plongement oriental est également de règle, mais il est beaucoup moins constant, tant dans le sens, que dans la valeur. En profil, on constate une alternance des deux formations, et l'on trouve les quartzites reposant sur les phyllades, aussi bien que l'inverse. En plan, les quartzites occupent une aire sensiblement supérieure à celle qui est occupée par les phyllades, et les affleurements de celles-ci se coincent aux terminaisons, de sorte qu'un banc de grès vient reposer immédiatement sur un autre; le phénomène est particulièrement net dans la haute vallée du rio das Pedras, à quelques kilomètres à l'ouest de Diamantina. De petits massifs de quartzites, noyés dans les phyllades et paraissant isolés, ne sont pas rares.

Il me semble qu'une telle structure s'explique le mieux, en admettant une *série d'écailles chevauchant légèrement*. La déformation plus intense et plus irrégulière des phyllades est due, vraisemblablement et principalement, à leur plus grande plasticité; on serait en présence d'une *disharmonie structurale* (supposition émise déjà par B. von Freyberg). Dans cette hypothèse, la région aurait subi un gauchissement, accompagné d'une compression, présomption fortement corroborée par la découverte, due à L. J. de Moraes, à quelque 50^{km} à l'ouest de Diamantina, de l'enpiètement en direction ouest [2] de l'Algonkien sur des couches siluriennes. Une telle structure serait, d'ailleurs

---

[2] L. J. DE MORAES, *Bol. n° 19 Serv. Fomento Prod. Min.*, 1937.

conforme à celle que j'ai décrite pour la partie méridionale de la chaîne (3).

Quant à l'âge des grès, je crois pouvoir le considérer comme itacolomi, pour toutes les roches de ce type entre le haut rio Jequitinhonha, à l'est de Diamantina, et la station Conselheiro Matta, à l'ouest de cette cité. En effet, le faciès à stratification entrecroisée est très fréquent, les niveaux à galets se rencontrent assez souvent et les formations de conglomérats de l'Algonkien supérieur reposent directement sur ces grès en plusieurs endroits.

Je considère les hauts plateaux et les sommets des crêtes vers 1200 ou 1300^{m} d'altitude, comme les restes d'une ancienne *surface d'érosion* (*premier cycle*), probablement pliocène (4). L'érosion actuelle dégage les bancs de grès (*surfaces structurales*).

EMBRYOGÉNIE VÉGÉTALE. — *Embryogénie des Campanulacées. Développement de l'embryon chez le* Trachelium cæruleum *L.* Note (*) de M. **Pierre Crété**, présentée par M. René Souèges.

Les Campanulacées sont caractérisées par un type embryonomique qui leur est tout à fait spécial et qui, placé dans la deuxième période de la classification périodique, représente le mégarchétype II dans le neuvième groupe embryogénique. C'est ce qu'ont établi les travaux de R. Souèges sur le *Campanula patula* L. (1) et le *Jasione montana* L. (2), de S. B. Kausik et K. Subramanyam sur le *Cephalostigma Schimperi* Hochst. (3). Les lois qui président au développement de l'embryon chez les Campanulacées ont été retrouvées chez le *Lobelia syphilitica* L. par moi-même (4) et par W. C. Hewitt (5), chez le *Lobelia amœna* Michx. Ce sont là des raisons qui ont paru suffisamment solides pour proposer le rattachement définitif des Lobéliacées aux Campanulacées. Tout en confirmant une fois de plus l'homogénéité de la famille, l'étude embryogénique du *T. cæruleum* m'a permis d'émettre une opinion nouvelle en ce qui concerne l'origine des initiales du cylindre central de la tige chez les plantes dont la partie cotylée s'édifie selon le mode habituel aux Composées du type *Senecio*.

Seuls les éléments provenant de la cellule apicale interviennent dans la formation de l'embryon, la cellule basale n'étant génératrice, pour sa part,

(3) B. Brajnikov, *B. S. G. F.*, séance du 19 mai, 1947.
(4) *Ibid.*

(*) Séance du 19 mai 1948.
(1) *Comptes rendus*, 202, 1936, p. 2009.
(2) *Comptes rendus*, 206, 1938, p. 278.
(3) *Bot. Gaz.*, 109, 1947, p. 85.
(4) *Comptes rendus*, 207, 1938, p. 177.
(5) *Journ. Elisha Mitch. Sc. Soc.*, 55, 1939, p. 63.

que d'un suspenseur filamenteux, dont quelques éléments supérieurs tirent cependant leur origine de la cellule apicale. A la tétrade *première*, du type linéaire filamenteux (*fig*. 3) devrait faire suite un embryon octocellulaire dont les trois étages supérieurs, issus de *ca*, seraient disposés en une tétrade *seconde*

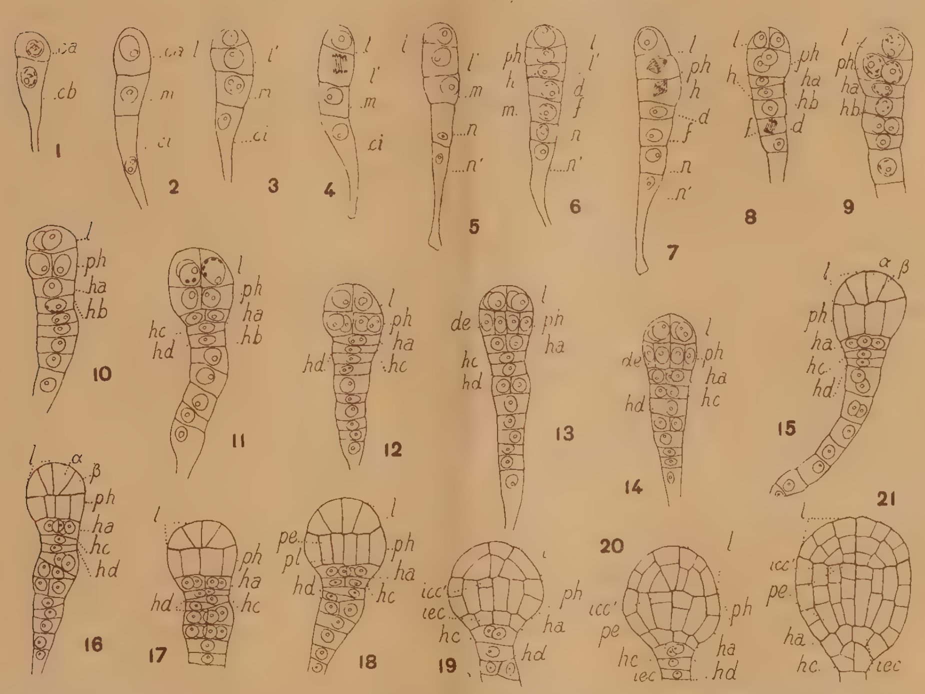


Fig. 1 à 21. — *Trachelium cæruleum* L. — Les principaux termes du développement de l'embryon. *ca*, cellule apicale et *cb* cellule basale du proembryon bicellulaire; *m* et *ci*, cellules-filles, et *d*, *f*, *n* et *n'*, cellules petites-filles de *cb*; *l*, cellules-filles juxtaposées de *ca*, ou octants supérieurs, ou partie cotylée; α et β, cellules filles de l'octant supérieur; *ph*, cellule-fille supérieure de *l'*, ou octants inférieurs, ou partie hypocotylée; *h*, cellule-fille inférieure de *l'*; *ha*, cellule-fille supérieure de *h*, génératrice des initiales de l'écorce de la racine, *iec*; *hb*, cellule-fille inférieure de *h*; *hc*, cellule-fille supérieure de *hb*, génératrice du primordium de la coiffe; *hd*, cellule-fille inférieure de *hb*, donnant quelques éléments du suspenseur; *de*, dermatogène; *pe*, périblème; *pl*, plérome; *icc'*, initiales de la stèle de la tige. G. : 370.

en T; ce stade n'a pas été rencontré en raison du cloisonnement tardif de l'étage *l* (*fig*. 6 et 8). Cet étage *l* donne naissance à quatre octants supérieurs (*fig*. 13), puis à la partie cotylée, selon les processus de division que l'on rencontre également chez les Composées ([6]); *ph* fournit les octants inférieurs à partir desquels se constitue la partie hypocotylée; c'est cette région qui donne naissance, de façon remarquablement précoce, aux initiales (*icc'*) de la stèle de la tige (*fig*. 19 et suivantes) par division transversale des quatre premières

([6]) R. Souèges, *Comptes rendus*, 171, 1920, p. 356.

cellules du plérome. La cellule *h* se partage en deux éléments superposés *ha* et *hb* (*fig.* 7, 8), puis, aux dépens de *hb*, prennent naissance, par un processus identique, deux nouvelles cellules *hc* et *hd*; *ha* fournit les initiales de l'écorce au sommet radiculaire (*iec*) et les parties externes de la coiffe; *hc* donne la partie médiane de la coiffe; *hd* contribue, en se divisant transversalement (*fig.* 17, 18 et 20), à la construction de la partie supérieure du suspenseur.

Ainsi, le développement de l'embryon présente une similitude absolue chez les Campanulacées, jusque dans la production d'un renflement du suspenseur au niveau des éléments issus de la cellule intermédiaire de la tétrade première. On a constaté que cette tendance à la prolifération cellulaire pouvait même aboutir, chez le *Lobelia syphylitica*, à des cas de polyembryonie tout à fait remarquables [7]. Une fois de plus, se trouve également mis en parfaite évidence le rôle joué par les quatre premières cellules du plérome dans la production des initiales du cylindre central de la tige. Ce rôle avait déjà été vérifié, chez le *Jasione montana* et le *Campanula patula*, par R. Souèges qui n'avait pas attaché, semble-t-il, toute l'importance qu'elle mérite à cette constatation. En effet, étant donné la grande similitude de construction de la partie cotylée chez les Composées du type *Senecio* et chez les Campanulacées, on peut admettre, avec une quasi-certitude que l'épiphyse des Composées est génératrice uniquement de l'épiderme et de l'écorce de l'axe épicotylé. Pas plus que chez les Campanulacées, elle ne donnerait naissance aux initiales du cylindre central de la tige qui tireraient leur origine des éléments différenciés au sommet de l'axe hypocotylé. La différenciation est précoce chez les *Jasione*, les *Campanula* et, bien que Kausik et Subramanyam n'aient rien spécifié à ce sujet, probablement aussi chez les *Cephalostigma*, d'après ce qu'il ressort de certaines figures données par ces auteurs. Elle est beaucoup plus tardive, au contraire, chez le *Lobelia syphilitica*, ainsi que chez les Composées.

MYCOLOGIE. — *Les Heimerliacées, subdivision des Acrasiales ?*

Note (*) de M. **Gabriel Arnaud**, présentée par M. Roger Heim.

V. Höhnel (1903) [1] a décrit un curieux organisme, le *Heimerlia hyalina* dont il a fait le type de la famille des Heimerliacées qu'il rapproche des Myxomycètes Echinostéliacées. En effet cette espèce a quelques analogies apparentes avec un Myxomycète incolore, assez rare, l'*Echinostelium minutum* de By (Lister, 3e éd., pl. 128, *f* à *i*).

---

(7) P. Crété, *Bull. Soc. bot. Fr.*, 85, 1939, p. 580.

(*) Séance du 19 mai 1948.

(1) Fr. von Höhnel, *Annales mycologici*, 1, 1903, p. 391; *Fragmente zur Mykologie*, 5, 1908, p. 1021 (37), et 16, 1914, p. 145 (97), figure 32 *c*.

Nous avons eu l'occasion d'étudier le *Heimerlia* et quelques formes voisines qui sont certainement très éloignées des Myxomycètes vrais; les spores en particulier sont entièrement différentes. Malheureusement la plupart des Heimerliacées sont très rares et peu visibles; on ne trouve le plus souvent que des fructifications isolées au cours d'observations accidentelles; aussi une étude complète n'a pas pu être faite; mais ces organismes paraissent se rapprocher des types les plus communs des Acrasiacées : *Dictyostelium*, *Polysphondylium*, dont ils se distinguent nettement et facilement par le pédicelle qui est plein au lieu d'être creux et subdivisé par de fausses cloisons.

Les Heimerliacées ont pu être confondues jusqu'ici, non seulement avec des Acrasiacées, mais encore avec des Mucoracées (*Mucor*, *Morthierella*) ou des Mucédinées (*Cephalosporium*, *Gliocladium*, *Helicocephalum*, etc.) avec lesquelles elles présentent un phénomène de convergence en rapport probablement avec un mode analogue de dispersion des spores.

Les Heimerliacées connues ont un port très uniforme. Elles sont entièrement incolores et transparentes; elles sont constituées par un pédicelle simple, dressé, et plein comme il a été dit, terminé par une sphère de gelée contenant les spores, qui sont toujours *petites*, simples, lisses et incolores, elliptiques ou globuleuses.

Le pédicelle s'élargit souvent à la base du sporange en une *collerette* plus ou moins marquée, et il se prolonge dans le *sporange* lui-même, dans certains genres, par une *columelle* de forme variable, mais pleine, compacte.

La gelée qui constitue la partie proprement dite du *sporange* peut présenter des différenciations fragiles qui s'altèrent facilement dans les préparations.

Dans le genre *Rhabdocystis* n. g., il y a une columelle en dôme et les spores sont globuleuses. Chez *Pygmomyces* les spores sont également globuleuses mais la columelle est formée de lobes dressés accolés.

Les autres genres ont des spores ellipsoïdales ou oblongues. Le *G. calospeira* a l'axe tordu en hélice au-dessous du sporange et la columelle est en massue. L'*Heliomycopsis* n. g. n'a pas de columelle et les spores sont prolongées aux deux bouts par un cône gélatineux, ce qui donne à ces spores un aspect fusiforme. Chez le *Heimerlia hyalina*, type du groupe, la columelle traverse le sporange et se recourbe au-dessus pour se relier avec lui; les spores sont ellipsoïdales, contrairement aux indications de v. Höhnel.

Le genre nouveau *Enigma* est aberrant à plus d'un titre : son pédicelle est creux (mais sans les fausses cloisons des Acrasiacées) et il se termine par une large collerette creuse au milieu de laquelle se dresse le sporange proprement dit.

L'appareil végétatif des Heimerliacées n'est pas connu de façon précise; il est probable qu'il constitue un plasmode ou un pseudo-plasmode analogue à ceux des Acrasiacées, Labyrinthulées, Myxomycètes, Myxobactériacées, et autres groupes d'organismes dont les affinités ne sont pas bien établies, car on

hésite à accorder la prééminence aux caractères d'ensemble de l'appareil végétatif, ou encore aux détails microscopiques de ce dernier ou des fructifications.

ZOOLOGIE. — *Mode de nutrition des embryons dans les poches incubatrices des Lamellibranches Sphæridés.* Note de Mme **Marie Couteaux-Bargeton**, présentée par M. Louis Fage.

On sait que chez de nombreux Lamellibranches les œufs se segmentent dans les branchies de l'adulte et atteignent les premiers stades larvaires avant d'être expulsés. Des Lamellibranches d'eau douce, les Sphæridés, ont la particularité d'assumer cette incubation pendant toute la durée du développement et de ne libérer les jeunes que presque adultes et pourvus déjà de gamètes. Plusieurs embryons sont incubés en même temps dans des poches branchiales qui ne sont pas préformées mais qui se constituent autour des œufs en segmentation et peuvent être assimilées à de véritables annexes embryonnaires. Les auteurs qui ont étudié ce phénomène (¹) se sont efforcés de préciser le mode de nutrition des embryons : ils concluent soit à l'absorption par l'embryon d'une sécrétion de la paroi des poches incubatrices, soit à l'ingestion directe de cellules détachées de cette paroi. Aucune donnée positive n'a encore été apportée sur la nature chimique des aliments ainsi fournis à l'embryon. L'étude histochimique des poches incubatrices chez *Sphærium* (*Cyclas*) *corneum* L. nous a permis de combler en partie cette lacune en précisant la nature des substances nutritives contenues dans les poches incubatrices et le mode le plus probable de leur pénétration dans l'embryon.

La paroi des poches incubatrices est formée de deux couches cellulaires : l'une, externe, est faite de petites cellules aplaties, l'autre de cellules de taille variable, les plus grosses atteignant 100^{μ}. Des fixations et des colorations appropriées montrent que cette couche interne est remarquablement riche en glycogène; de nombreuses granulations de glycogène sont également mises en évidence dans la cavité des poches. Une fixation par l'acide osmique, qui permet, en évitant les grossiers artefacts habituels, de préciser la distribution du glycogène dans la cellule (²) indique que les plus grosses cellules de la paroi contiennent une grande quantité de glycogène à l'état diffus, réparti de manière uniforme dans tout leur cytoplasme (³). Dans les cellules plus petites, le glyco-

(¹) S. T. Brooks et H. B. Herrington, *Amer. J. Sci.*, **242**, 1944, p. 656; G. Litwer, *Z. mikr.-anat. Forsch.*, **30**, 1932, p. 159.

(²) *Bull. Soc. Zool. France*, **71**, 1946, p. 121.

(³) Cet aspect est identique à celui que nous avons observé dans d'autres cellules très riches en glycogène comme les cellules déciduales du placenta des Mammifères ou les cellules de Leydig des Mollusques et de certaines Annélides.

gène n'est pas visible; il apparaît progressivement au fur et à mesure que leur taille s'accroît.

Les cellules de la paroi des poches ne contiennent que de faibles quantités de graisses, représentées par quelques granules soudanophiles et osmiophiles. On y met en évidence des quantités importantes de ribose-nucléo-protéines (méthode au vert de méthyle-pyronine avec contrôle par la nucléase pancréatique).

Comme le montre l'étude de coupes sériées, le glycogène observé dans la cavité des poches incubatrices provient, au moins pour une grande part, de cellules qui se détachent de la paroi, puis se désagrègent; on rencontre souvent dans le tube digestif d'embryons âgés, à côté d'amas de glycogène, les noyaux en pycnose de ces cellules. Mais il semble aussi que le simple éclatement du pôle apical de cellules nourricières restées en place puisse libérer une partie de leurs réserves dans la cavité. Nous avons observé, également sur coupes sériées, un embryon de 1^{mm}, 5, étroitement appliqué par les bords ventraux de sa coquille entr'ouverte contre la paroi des poches nourricières. Entre les bourrelets palléaux, on aperçoit s'étendant de la paroi des poches à la cavité palléale de l'embryon une véritable coulée de protoplasme contenant des noyaux entiers, d'autres désagrégés et des granules de glycogène. Ce phénomène est peut-être exceptionnel; les embryons sont en effet libres dans la cavité des poches et n'ont probablement avec la paroi que des contacts rares ou fugaces.

Il faut d'autre part souligner que le pied, différencié dès le stade véligère, paraît capable de déterminer par ses mouvements la chute ou l'éclatement des cellules nourricières. Il apparaît souvent sur coupes, allongé hors de la coquille larvaire et très proche de la paroi. Chez des embryons vivants, observés dans une poche à moitié fendue, le pied se montre aussi actif que chez l'adulte.

Pendant son séjour dans les poches incubatrices, l'embryon de Sphærium se charge d'importantes réserves de glycogène qui témoignent de la richesse de son alimentation; ces réserves sont d'autant plus abondantes chez les larves que la paroi des poches et les tissus de l'adulte contiennent eux-mêmes plus de glycogène. Chez l'embryon et chez l'adulte, ces réserves se répartissent surtout dans le tissu conjonctif, les fibres musculaires, les cellules du rein et les épithéliums digestifs.

En résumé, l'étude histochimique des Sphæridés révèle que les grosses cellules de la paroi des poches incubatrices sont remarquablement riches en glycogène et se distinguent par ce caractère de toutes les autres cellules de l'adulte. Le glycogène qu'elles contiennent est libéré dans la cavité des poches, puis absorbé par les embryons. Par l'ingestion de cellulles détachées de la paroi et devenues libres, les embryons bénéficient non seulement de leurs réserves de glycogène, mais aussi des graisses et des protides de leur cytoplasme et de leur noyau.

BIOLOGIE GÉNÉRALE. — *Histogénèse vaginale chez la Taupe* (Talpa europæa *L.*). Note de M. **René Godet**, présentée par M. Maurice Caullery.

L'histogénèse du vagin a fait l'objet de très nombreuses recherches. Ces travaux s'échelonnent sur plus d'un siècle. Mais c'est surtout depuis 1930 que que de nouvelles études précises, chez la Femme par E. Vilas (1) et C. T. Kempermann (2), chez le Lapin par J. S. Baxter (3) et A. Jost (4), chez la Souris par A. Raynaud (5), ont permis de se faire une opinion d'ensemble sur l'histogénèse vaginale et sur les caractères communs à ces espèces, en ce qui concerne la mise en place du vagin. C'est ainsi que, chez ces Mammifères, on peut reconnaître au vagin, en admettant que celui-ci est représenté par la portion des voies génitales reliant la région où se fixent les embryons (utérus ou cornes utérines) à l'orifice externe, une double origine embryologique : les canaux de Müller et le sinus urogénital. La proportion de chacun de ces constituants, et la façon dont ils s'individualisent, au cours du développement vaginal, étant variable selon les espèces.

Or, d'après les travaux de J. Wood (6), de F. Krasa (7) et de W. A. Mijsberg (8), le vagin de la Taupe serait issu des canaux de Müller auxquels s'associerait une invagination de l'épithélium périnéal, ou portion cutanée. Le fait que ces auteurs refusent toute participation du sinus urogénital à la formation du vagin mérite d'être souligné; il est évident que cette conception ne s'accorde guère avec les conclusions que nous venons d'énoncer plus haut. De plus, l'importance accordée à la portion cutanée, surtout par Mijsberg, tend à donner une allure tout à fait exceptionnelle au mode de développement du vagin chez la Taupe.

Au cours de nos recherches sur l'organogénèse sexuelle normale et expérimentale chez la Taupe, l'histogénèse vaginale a retenu notre attention. Au terme de ce travail, il nous apparaît que les hypothèses de Wood, de Krasa et de Mijsberg ne sauraient être conservées. Chez la Taupe, à la naissance, le vagin est à peine ébauché. C'est dans les premiers jours de la vie post-embryonnaire qu'il s'individualise en un cordon, dont la portion postérieure n'est pas encore pourvue de lumière et d'orifice externe. C'est à huit mois (au début du premier œstrus) que se réalise un conduit vaginal véritable, mettant en communication

---

(1) *Zeitschr. Anat. Entw. gesch.*, 98, 1932, p. 263.
(2) *Morphol. Jahrb.*, 75, 1935, p. 151.
(3) *J. Anat.*, 67, 1933, p. 555.
(4) *Ann. Endocrin.*, 4, 1943, p. 221.
(5) *Bul. Biol. France-Belgique*, suppl. n° 29, 1942.
(6) *Proc. Zool.*, London, 15, 1914, p. 191.
(7) *Anat. Hefte*, 55, 1918, p. 443.
(8) *Zeitschr. Anat. Entw. gesch.*, 77, 1925, p. 650.

les cornes utérines avec l'extérieur. Cet échelonnement dans la mise en place de cet organe rend les observations difficiles. L'accélération des processus histogénétiques chez l'embryon, par l'injection d'œstrogènes à la mère gestante (R. Godet) [9], nous a beaucoup aidé dans l'interprétation des structures vaginales chez le nouveau-né. D'après nos observations, le vagin de la Taupe âgée de quelques jours est constitué essentiellement par trois régions d'origines différentes : une *région antérieure*, s'étendant des cornes utérines à la vessie, issue des canaux de Müller fusionnés ; une *région postérieure* ou cordon épithélial, tirant son origine de la paroi dorsale du sinus urogénital et une *région terminale*, très courte, de nature cutanée, issue d'un repli situé à la jonction du clitoris et du périnée. Précisons que, pour la région postérieure : *a*. la portion crâniale de ce segment se forme par étirement de la paroi dorsale du sinus, lors de la constitution d'un pédicelle à la base des canaux de Müller ; *b*. la portion moyenne s'isole très tardivement (après la naissance), aux dépens d'un épaississement de la paroi dorsale du sinus ; *c*. la portion caudale se réalise précocement (embryon de 19-24^{mm}) par délamination de la paroi dorsale sinusaire, au cours d'une translation du sinus. Enfin, la région terminale se constitue par la coalescence des épithéliums du tubercule génital et du périnée, mis en contact au cours de l'embryogénèse. La formation de ce repli détermine le mode d'ouverture et l'évolution périodique de l'orifice vaginal chez l'adulte [10].

Ces observations montrent que le vagin de la Taupe et celui des autres Mammifères, pour lesquels on a des renseignements précis (Femme, Lapin, Souris), tirent embryologiquement leur origine des mêmes constituants. La mise en place d'un repli cutané, reliant le cordon vaginal avec l'extérieur, répond seule à des conditions particulières à la Taupe. Cet insectivore ne doit donc plus faire obstacle, désormais, à l'unité qui paraît se dégager chez les Mammifères au sujet de l'origine du vagin. L'étude de la formation du vagin chez la Taupe est, au contraire, une preuve de plus à apporter à la conception selon laquelle le vagin tire son origine essentiellement, de deux constituants (canaux de Müller et sinus urogénital).

BIOLOGIE GÉNÉRALE. — *Sur la structure des nageoires chez les femelles de* Lebistes reticulatus *Regan, mascuilnisées par la prégnéninolone*. Note de M. **Louis Gallien**, présentée par M. Maurice Caullery.

Parmi les stéroïdes dont l'action a été étudiée sur le Téléostéen vivipare *Lebistes reticulatus* Regan, c'est la prégnéninolone, hormone synthétique polyvalente, non identifiée dans l'organisme animal, qui a manifesté l'action androgène la plus intense, très supérieure notamment à celle du propionate de

(9) *Comptes rendus*, **223**, 1946, p. 46.

(10) La formation de ce repli traduit une masculinisation de l'embryon femelle.

testostérone. Éversole (¹) et Mlle Régnier (²), qui ont étudié cette action, ont noté, entre autres effets, la transformation de la nageoire anale de la femelle en un gonopode analogue à celui du mâle.

Or, si l'on observe des femelles dont le phénotype sexuel somatique est ainsi masculinisé, on note que les transformations portent également sur les nageoires pelviennes et sur la dorsale. De plus, dans ce cas comme dans celui du gonopode, la masculinisation est relative et ne réalise jamais une structure identique à celle du mâle. Il est donc nécessaire d'étudier la structure fine des nageoires, de leur squelette profond, et non pas seulement l'aspect global, pour saisir l'intensité et la qualité de la masculinisation.

Chez la femelle, la nageoire anale comporte dix rayons de type normal, les troisième, quatrième et cinquième étant les plus longs. Le squelette profond de la nageoire est constitué par neuf pièces radiales indépendantes et grêles.

Chez le mâle, la nageoire anale est transformée en un gonopode. Le troisième rayon est très épaissi et ses articles terminaux forment une série d'une quinzaine de crochets se recouvrant obliquement. Un lobe charnu s'applique sur toute la longueur du troisième rayon, protégeant ainsi les crochets. Le rayon 4, possède, sur sa branche dorsale, une série de crochets; le rayon 5 s'incurve dorsalement dans sa région distale et se termine par deux crochets. Le squelette profond est formé par les neuf pièces radiales soudées en une lame, sauf la première et les deux ou trois dernières. De plus, la pointe de cette lame vient s'appuyer sur deux arcs hémaux qui, au lieu de rester en position perpendiculaire par rapport aux corps vertébraux comme chez la femelle, se couchent vers l'avant, de façon à former un angle très aigu avec la colonne vertébrale.

Or, chez la femelle adulte masculinisée par la prégnéninolone, on assiste bien à une transformation de la nageoire anale, mais qui ne réalise jamais la structure du gonopode du mâle. Le troisième rayon s'épaissit, forme des crochets, mais moins aigus et moins nombreux. Un lobe charnu se développe, mais ne recrouvre pas les crochets terminaux. Les rayons 4 et 5 esquissent une transformation, mais seuls les deux crochets terminaux du rayon 5 se développent. Les pièces radiales profondes se soudent en une lame comme chez le mâle, cependant les arcs hémaux demeurent dans leur position. Les proportions de la nageoire restent du type femelle. L'intensité de la transformation dans le sens mâle dépend du moment à partir duquel agit l'hormone. Si de jeunes alevins sont traités dès la naissance, on voit, dans les deux sexes, un gonopode typique se former. Les arcs hémaux, chez la femelle notamment, se couchent et prennent la position caractéristique du mâle.

(¹) *Endocrinology*, **25**, 1939, p. 328 et **28**, 1941, p. 603.

(²) *Bull. biol. France et Belgique*, **72**, 1938, p. 385, et *Comptes rendus*, **213**, 1941, p. 537.

Par conséquent, la labilité de la détermination des différents éléments ostéologiques de la nageoire anale n'est pas identique. La détermination chronologique des arcs hémaux transformés est beaucoup plus précoce que celle des pièces radiales et des rayons.

Deux autres faits restent à noter, que n'ont pas signalés les auteurs cités. Les nageoires pelviennes constituent un variant sexuel, qui se marque par le développement fibreux à l'extrémité du premier et surtout du second rayon chez le mâle. Ce dernier rayon est beaucoup plus long que chez la femelle. Chez les femelles adultes masculinisées, un épais manchon fibreux se développe comme chez le mâle; cependant le premier rayon ne s'allonge pas. La nageoire dorsale du mâle s'étend parfois très longuement vers l'arrière, atteignant jusqu'à la moitié de la caudale. La dorsale de la femelle est toujours courte. Chez les femelles mascunilisées, la dorsale s'allonge et tend à prendre le type mâle,mais ne réalise jamais l'allongement observé chez le mâle.

En résumé, la masculinisation des nageoires, chez la femelle de *Lebistes* soumise à la prégnéninolone, est relative et imparfaite. Les différents éléments ostéologiques ont une réactivité différentielle au traitement masculinisant, ce qui indique que ces éléments sont des territoires manifestant une sensibilité variable à l'action androgène.

CHIMIE BIOLOGIQUE. — *Métabolisme de la glucosamine. Augmentation de l'absorption d'oxygène et de la libération d'ammoniaque par E. Coli en présence d'azide.* Note (*) de M. **Albert-Jean Rosenberg**, présentée par M. Maurice Javillier.

La plupart des travaux sur la glucosamine sont consacrés à l'étude de sa structure chimique; à l'exception du travail de C. Lutwak-Mann [1], sa biochimie est peu connue. C'est ce qui nous a incité à entreprendre l'étude de son métabolisme.

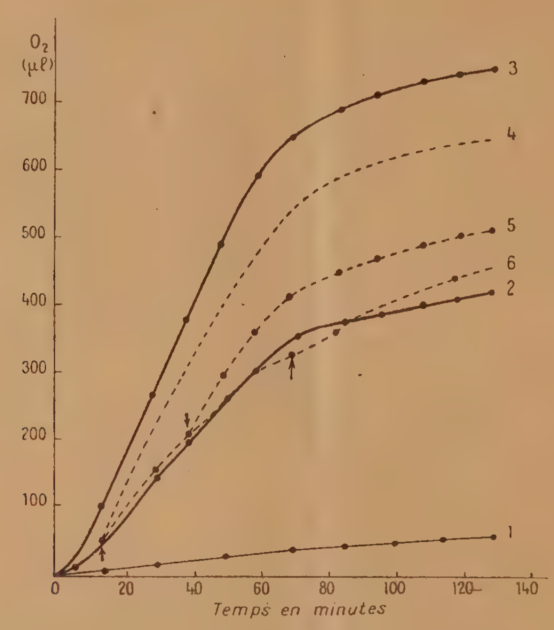
Dans le présent travail, nous rendons compte des résultats que nous avons obtenus à l'aide de suspensions de bactéries lavées. E. Coli (souche M du Service de physiologie microbienne de l'Institut Pasteur) est cultivé dans des boîtes de Roux sur hydrolysat de caséine gélosé. Après deux lavages dans l'eau physiologique, les bactéries sont mises en suspension dans un tampon de phosphates (Sörensen) M/10, pH 6,5.

En aérobiose on observe, dans le dispositif de Warburg, une absorption de $1^{mol},5\ O_2$ par molécule de glucosamine (courbe 2). La moitié de l'azote de la glucosamine apparaît sous forme d'ammoniaque $Q_{O_2} = 200$ (pour le glu-

(*) Séance du 10 mai 1948.

(1) *Bioch. Journal*, 35, 1941, p. 610.

cose, $Q_{O_2} = 360$). Le quotient respiratoire est de 0,90. L'absorption d'oxygène n'est pas sensible au NaF M/50, ni au malonate de sodium M/100 ni à H_2S M/500; elle est inhibée à 80 % par AsO_3''' M/500 et complètement inhibée par KCN M/250.



Courbe (1) : $1^{mg},5$ de bactéries dans le tampon de phosphate M/10. — Courbe (2) : comme (1) + 140 μl solution de glucosamine HCl. — Courbe (3) : comme (2) + NaN_3 M/250 conc. finale. — Courbes (4), (5), (6) : les flèches indiquent l'addition de l'azide aux différents temps. Vol. final : $3^{ml},2$; T = 37°, gaz : air.

En présence de NaN_3 M/250, on constate, fait un peu inattendu, une augmentation de l'absorption de O_2 de 80 à 95 % ($2^{mol},75$ O_2 par molécule de glucosamine) et une augmentation de la libération d'ammoniaque également de 70 à 90 % (courbe 3). Dans ce cas $Q_{O_2} = 388$ et QR = 0,86. On remarquera, sur les deux courbes, que la vitesse d'absorption d'oxygène n'atteint un taux constant qu'après 5-10 minutes.

Si dans les fioles de Warburg, on ajoute l'azide à des temps différents, on constate que l'addition de l'azide est surtout efficace au temps 0. Au fur et à mesure que l'addition de l'azide à la glucosamine est effectuée plus tardivement, alors que cette dernière a déjà été en partie métabolisée, l'exaltation de l'absorption d'oxygène est de plus en plus faible (courbes 4, 5, 6).

En anaérobiose, l'action de l'azide sur la glucosamine, dans les tubes de Thunberg remplis d'azote, est sans effet sur la déshydrogénation, mais inhibe complètement la désamination.

Si l'on remplace le tampon de phosphate par le tampon de glyoxaline, on

constate : 1° que la quantité d'oxygène absorbée en absence d'azide est aussi grande que la quantité d'oxygène absorbée en présence d'azide dans le tampon de phosphate ; 2° que le dégagement d'ammoniaque en absence d'azide atteint la même valeur qu'en présence d'azide dans le tampon de phosphate ; 3° qu'en anaérobiose, dans le tampon de glyoxaline, la glucosamine n'est pas désaminée.

L'ensemble de ces faits ([2]) montre que l'azide agit sur la glucosamine elle-même et non sur ses produits de dégradation. Il s'ensuit que E. Coli, en aérobiose, dégrade la glucosamine par deux processus différents, suivant que l'on se trouve ou non en présence d'azide. Dans le premier cas l'oxydation est complète. De plus, les résultats obtenus dans le tampon de glyoxaline à l'air, suggèrent qu'en présence d'azide la dégradation se fait sans phosphorylation. Les expériences en anaérobiose et dans le tampon de glyoxaline indiquent que E. Coli ne peut dégrader la glucosamine que par la voie phosphorylante. Il est connu (Meyerhof, Spiegelman) que l'azide inhibe le métabolisme du phosphore acido-soluble.

CHIMIE BIOLOGIQUE. — *Sur l'hydrolyse diastasique des glucofructosanes : allure générale de la réaction.* Note (*) de M. **Henri Belval** et Mme **Andrée de Grandchamp-Chaudun**, présentée par M. Maurice Javillier.

L'hydrolyse diastasique des glucofructosanes n'a pu encore être étudiée faute d'un ferment assez actif. Nous avons comblé cette lacune grâce à l'emploi d'une invertase concentrée.

On connaît les lois de l'hydrolyse diastasique des polysaccharides tributaires de l'invertase ; l'allure du phénomène dépend essentiellement du *rapport* des concentrations du sucre et de l'enzyme : la réaction comporte ou non une période de vitesse constante selon que le sucre ou le ferment est en excès, et la vitesse initiale est proportionnelle, dans le premier cas, à la dose de ferment ; dans le second, à la concentration du sucre, comme si une quantité donnée de diastase fixait *instantanément* un poids déterminé de polysaccharide, d'ailleurs proportionnel à son poids moléculaire, le complexe sucre-enzyme se décomposant ensuite *avec une vitesse finie*, conformément à la loi d'action de masse.

Les chiffres consignés ci-dessous sont relatifs à la glucofructosane d'Asphodèle ; nous en avons suivi l'hydrolyse au polarimètre, à température constante, en faisant varier les conditions de concentrations de l'enzyme et de la fructosane.

([2]) En comparant nos courbes, avec ou sans azide, à celles de Stephenson et Clifton (*Adv. Enzym.*, 6), il ne semble pas que le phénomène que nous avons observé soit identique au leur.

(*) Séance du 19 mai 1948.

1[re] *expérience* (Fructosane, 2^g %; Invertase, 2^{cm^3} %; $l = 3^{dm}$; $\lambda = 5890$; $\theta = 14^o$).

Temps (en demi-heures).	α_t (°).	$\alpha_t - \alpha_{t+1}$ (°).	Temps (en demi-heures).	α_t (°).	$\alpha_t - \alpha_{t+1}$ (°).
0	—1,02	—	4	—2,34	0,24
1	—1,44	0,42	5	—2,54	0,20
2	—1,80	0,36	6	—2,72	0,18
3	—2,10	0,30			

Les différences $\alpha_t - \alpha_{t+1}$ décroissent tout au long de la réaction, comme c'est le cas pour le saccharose en présence d'un excès de ferment.

2[e] *expérience* (Fructosane, 10^g %; Invertase, 2^{cm^3} %, $l = 3^{dm}$; $\lambda = 5890$; $\theta = 16^o$).

Temps (en quarts d'heure).	α_t (°).	$\alpha_t - \alpha_{t+1}$ (°).	Temps (en quarts d'heure).	α_t (°).	$\alpha_t - \alpha_{t+1}$ (°).
0	—3,80	—	6	—7,24	0,42
1	—4,40	0,60	7	—7,60	0,36
2	—5,04	0,64	8	—7,92	0,32
3	—5,68	0,64	9	—8,22	0,30
4	—6,31	0,63	13	—9,20	0,98 : 4
5	—6,82	0,51			

3[e] *expérience* (Fructosane, 10^g %; Invertase, 1^{cm^3} %; $l = 3^{dm}$; $\lambda = 5890$; $\theta = 17^o$).

Temps (en quarts d'heure).	α_t (°).	$\alpha_t - \alpha_{t+1}$ (°).	Temps (en quarts d'heure).	α_t (°).	$\alpha_t - \alpha_{t+1}$ (°).
0	—3,97	—	5	—5,83	0,41
1	—4,28	0,31	6	—6,20	0,37
2	—4,64	0,36	7	—6,54	0,34
3	—5,02	0,38	8	—6,84	0,30
4	—5,42	0,40	9	—7,14	0,30

Dans ces deux dernières expériences, non seulement les écarts entre deux lectures consécutives ne diminuent pas dès le début, mais on observe même, notamment dans l'expérience 3, une *augmentation* des différences $\alpha_t - \alpha_{t+1}$, ce qui fait augurer de l'existence d'un phénomène secondaire, comme cela se produit dans l'hydrolyse du saccharose par suite de la mutarotation du glucose; nous reviendrons sur ce point.

Indiquons enfin qu'en faisant agir, à titre de contrôle, sur une même solution de glucofructosane, des doses croissantes d'invertase, nous avons obtenu les chiffres ci-dessous pour les poids de sucre réducteur mis en liberté après une demi-heure :

Concentration en enzyme :	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	1
Réducteur en mg. dans 5^{cm^3} :	26	51	79	98	107	110	110

Il y a proportionnalité entre la concentration du ferment et la vitesse d'hydro-

lyse dans les trois premières solutions; la vitesse continue à croître ensuite, mais moins vite que la dose d'enzyme pour en devenir enfin indépendante.

L'hydrolyse des glucofructosanes de Narcisse et de Lycoris, celle de la synanthrine aussi, présentent, nous nous en sommes assurés, les mêmes caractéristiques.

CHIMIE BIOLOGIQUE. — *Action d'agents de dénaturation des protéides sur la biréfringence des cristaux de sérum-albumine*. Note de M. **Jean-Jacques Pérez**, présentée par M. Jacques Tréfouël.

Une fraction de la sérum-albumine de Cheval peut être obtenue en cristaux relativement volumineux, atteignant jusqu'à $0^{mm},4$ de longueur et $0^{mm},07$ de largeur ([1]). Ces cristaux, de forme hexagonale, présentent une hémiédrie pyramidale et sont *biréfringents*.

Les dimensions de ces cristaux permettent l'étude de leurs propriétés optiques. Dans la présente Note, nous examinons l'action de quelques agents de dénaturation des protéides sur la forme et la biréfringence de ces cristaux.

Le pouvoir dénaturant de la température sur les protéides est bien connu. Pour étudier son action sur la biréfringence des cristaux de sérum-albumine, ceux-ci sont examinés dans leurs eaux-mères ([2]), entre lame et lamelle, celle-ci étant lutée pour éviter toute évaporation. La préparation est placée sur la platine chauffante d'un microscope polarisant, entre nicols croisés et l'on élève très lentement la température. A 80°, on voit disparaître en quelques minutes la biréfringence du cristal sans que sa forme et son aspect extérieur soient modifiés. D'autre part, on constate que, parallèlement à la disparition de la biréfringence, le protéide est dénaturé. En effet, au contraire des cristaux naturels, les cristaux chauffés jusqu'à disparition de la biréfringence ne se dissolvent pas dans l'eau distillée et il faut dépasser le pH de 9 pour parvenir à les dissoudre. De plus, après élimination de toute trace de sels par dialyse, l'albumine est devenue insoluble à son point isoïonique, ce qui est la définition même de la dénaturation. Ces cristaux chauffés, après dissolution à pH 9,3, ne peuvent plus être obtenus sous forme cristalline et cette inaptitude à cristalliser n'est pas la conséquence de la dissolution en milieu alcalin, car les cristaux non chauffés peuvent très bien être amenés à recristalliser après avoir été dissous au même pH.

Des agents dénaturants, comme l'acide trichloracétique et l'acide sulfosa-

---

([1]) Bonot, *Bull. Soc. Chim. Biol.*, 27, 1945, p. 495; J.-J. Pérez *in* Loiseleur, *Techniques de laboratoires*, Paris, 1947.

([2]) En général, le cristal d'un protéide n'est parfaitement cristallin que dans son eau-mère (D. P. Riley, *Symposium sur les protéines*, tenu à Liége en 1946.) L'eau-mère du cristal est une solution demi-saturée de sulfate d'ammonium.

licylique, ont une action comparable à celle de la température. C'est ainsi que pour une concentration de 3 % (dans les eaux-mères) en acide trichloracétique, le pouvoir biréfringent des cristaux disparaît en une demi-heure. Pour des concentrations plus élevées en acide trichloracétique, la perte de la biréfringence est beaucoup plus rapide et peut être suivie d'une désagrégation complète du cristal.

Que peut-on conclure de ces faits? La forme géométrique et la biréfringence ne suffisent pas à elles seules pour permettre d'affirmer la structure cristalline des particules ([3]). Les particules de protéide examinées pourraient être des pseudo-cristaux formés de molécules allongées, disposées parallèlement les unes aux autres et séparées par des couches d'eau ([4]). De telles particules seraient biréfringentes et l'élimination des couches d'eau par le chauffage suffirait à faire disparaître la biréfringence; or, suivant Sörensen ([5]), la dénaturation s'accompagne d'une déshydratation. Mais, s'il ne s'agissait que d'une perte d'eau sans modifications structurales, il semble que le phénomène devrait être reversible. Or, nous avons vu qu'il ne l'est pas, c'est-à-dire qu'on ne peut faire cristalliser à nouveau les cristaux ayant perdu leur biréfringence.

Il est donc beaucoup plus probable que la biréfringence des particules dépend de l'orientation des molécules suivant un réseau cristallin et que la disparition de cette biréfringence, ainsi que la dénaturation simultanée du protéide, résulte d'une désorganisation de ce réseau, d'un réarrangement moléculaire. S'il y a également déshydratation du protéide, on peut penser que ce réarrangement moléculaire conduit à l'apparition de groupements hydrophobes (Mirsky et Anson), puisque, comme on sait, la dénaturation ne paraît pas modifier le nombre des groupements polaires hydrophiles acides et basiques. Si l'on tient compte, en outre, comme l'avait déjà observé Mirsky ([6]), que les cristaux chauffés sont plus résistants aux agents chimiques que les cristaux naturels, on peut en conclure que ces changements structuraux s'accompagnent de l'apparition de formes nouvelles de liaison entre les molécules.

En résumé, certains agents de dénaturation des protéides font disparaître le pouvoir biréfringent des cristaux de la sérum-albumine. Ce fait semble en accord avec l'hypothèse que la dénaturation du cristal résulte de modifications structurales entraînant l'apparition de nouvelles fonctions et de nouvelles liaisons.

([3]) Seule une étude aux rayons X permettrait de résoudre cette question.

([4]) Suivant Perutz, le cristal d'hémoglobine serait formé de feuillets de protéide séparés de couches d'eau (*Nature*, **149**, 1942, p. 491; *Ibid.*, **156**, 1943, p. 714).

([5]) *C. R. Lab. de Carlsberg*, **12**, 1917.

([6]) *Science*, **93**, 1941, p. 285.

PHARMACOLOGIE. — *Action protectrice de la méthionine à l'égard de l'hyperplasie thyroïdienne d'origine sulfamidique.* Note (*) de MM. **Alexandre Aschkenasy**, **Guy-Jean Rolland** et **Claude Polonovski**, transmise par M. Robert Courrier.

On sait (Mac Kenzie et Mac Kenzie 1942) que les sulfamides déterminent chez le Rat une hypertrophie des thyroïdes qui correspond histologiquement à une hyperplasie de l'épithélium glandulaire avec tarissement de la sécrétion colloïde.

Or, on connaît l'existence d'un antagonisme sulfamides-méthionine en ce qui concerne l'action bactériostatique des sulfamides (Bliss et Long, 1941). Un tel antagonisme existe également à l'égard des modifications histologiques dues à l'intoxication sulfamidique. Ainsi, nous avons pu constater que la méthionine s'opposait à la production du goître sulfamidique : dix rats adultes (6 ♂ et 4 ♀) reçoivent un régime comportant 0,4 % de sulfadiazine, le plus goîtrigène des sulfamides, et seulement 4 % de caséine ([1]), ceci pour amplifier l'effet toxique des sulfamides. La moitié de ces rats reçoit en outre 0,3 % de *d*-l méthionine, l'autre moitié une quantité équivalente de glycocolle. Pendant les 46 premiers jours les aliments sont donnés *ad libitum* : les rats à la méthionine manifestent un appétit considérable et ingèrent une quantité presque double de nourriture et par conséquent deux fois plus de sulfadiazine mélangée à l'aliment.

Du 47e jour jusqu'à la fin de l'expérience, les rats à la méthionine ne reçoivent plus qu'une quantité d'aliments égale à celle qui est absorbée par les autres rats, mais en même temps, on leur administre un taux de méthionine identique à ce qu'ils absorbaient auparavant.

Le 103e jour, tous les rats sont tués par saignée, et leurs thyroïdes pesées et examinées histologiquement. Alors que le poids global des animaux se trouve réduit de $43,7 \pm 3,5$ % ([2]) dans le groupe à la sulfadiazine seule et seulement de $18,7 \pm 2,35$ % chez les rats à la méthionine, l'hypertrophie des thyroïdes est en revanche bien moindre chez la plupart de ces derniers ($0^g,079 \pm 0,013$, contre $0,122 \pm 0,016$), et le poids relatif des thyroïdes est de ce fait beaucoup plus bas, tout en restant très supérieur à celui des témoins, $0,054 \pm 0,017$ % de poids corporel chez les rats à la méthionine, contre $0,114 \pm 0,014$ dans le groupe sans méthionine et 0,016 % chez les témoins normaux.

Les altérations histologiques sont également beaucoup moins marquées chez

---

(*) Séance du 19 mai 1948.

([1]) Caséine 4, fécule 80, mélange salin de Terroine 3, huile 5, sciure 4, extrait de malt 2, vitamines A, C, D, B_1, B_2, B_6, PP, pantothénate de Ca, choline.

([2]) Erreur standard $\sigma = \sqrt{\dfrac{\Sigma d^2}{n(n-1)}}$.

tous les rats à la méthionine, à l'exception d'une femelle dont l'intoxication a été particulièrement avancée.

Chez les rats à la sulfadiazine seule, la thyroïde fortement hypertrophiée ne contient qu'un très petit nombre de vésicules normales. Les vésicules restantes présentent une lumière extrêmement réduite, entièrement vide ou contenant

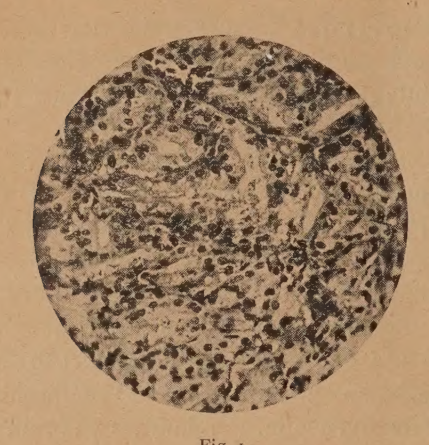


Fig. 1.

Fig. 1. — Thyroïde d'un Rat ayant reçu de la sulfadiazine seule. (× 350.)

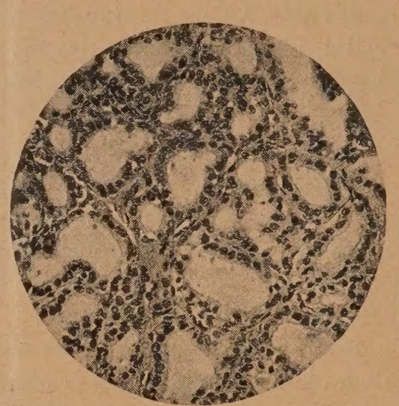


Fig. 2.

Fig. 2. — Thyroïde d'un Rat ayant reçu de la sulfadiazine et de la méthionine. (× 350.)

quelques débris cellulaires ou bien peu de colloïde mal colorée et fortement vacuolaire. L'épithélium de ces vésicules est plus haut qu'un épithélium normal. En de nombreux endroits il n'existe pas trace de structure vésiculaire; elle est remplacée par des amas épithéliaux homogènes. Les travées conjonctives contiennent des capillaires gorgés de sang.

Chez les rats à la méthionine, la structure vésiculaire est conservée dans la totalité de la glande malgré l'hypertrophie encore considérable de cette dernière. Les vésicules sont même plus volumineuses que chez le Rat normal, et ceci aussi bien au centre qu'à la périphérie. L'épithélium est normal ou même aplati et la colloïde infiniment plus abondante que dans le groupe sans méthionine; elle est en général homogène avec peu de vésicules chromophobes. L'aspect est donc celui d'une thyroïde hypo-active.

La congestion est elle aussi bien moins accusée.

Ainsi l'effet protecteur de la méthionine est indiscutable, mais il n'est certes pas complet dans notre expérience; ceci tient probablement à ce que l'intoxication a duré trop longtemps. On doit également tenir compte du fait que pendant la phase de l'alimentation libre, les rats à la méthionine ont absorbé une quantité bien plus élevée de sulfadiazine que les autres rats, privés de l'action eupeptique de cet amino-acide.

Conclusions. — Chez les rats soumis à une intoxication prolongée par la sulfa-

diazine, la méthionine exerce un effet protecteur net à l'égard de l'hyperplasie parenchymateuse de la glande thyroïde et augmente notamment le taux de la colloïde intravésiculaire. Par un mécanisme qui reste encore à déterminer, la méthionine s'oppose donc à l'inhibition sulfamidique de la sécrétion thyroïdienne.

THÉRAPEUTIQUE. — *Traitement des souris tuberculisées, par de fortes doses de streptomycine.* Note (*) de MM. **Constantin Levaditi**, **Aron Vaisman** et **Robert Lévy**, présentée par M. Gaston Ramon.

Continuant nos recherches sur l'action thérapeutique exercée par la streptomycine chez les souris contaminées, par voie intraveineuse, avec la souche de bacilles tuberculeux H 512 (1^{mg} par souris de 20^{g}), nous avons recherché quelle pouvait être cette action si l'on traitait les animaux par 3000 U [dose supérieure à celle utilisée par nous jusqu'à ce jour ([1])]. Les résultats enregistrés font l'objet de la présente Note.

Technique. — Une série de 38 souris est infectée comme il vient d'être dit. Un certain nombre servent de témoins, d'autres sont traitées comme il suit : *a*. administration quotidienne de 3000 U de streptomycine pendant 2 mois; *b*. arrêt de 12 jours, puis *c*. seconde cure journalière avec la même dose d'antibiotique pendant 23 jours (au total, 15600 U pour la première cure et 72000 U pour la seconde). Chaque animal a donc reçu en tout 228000 U par 20^{g} de poids.

Résultats. — *Souris témoins*, au nombre de 10. Tous les sujets, sauf un, sont morts entre le 26e et le 109e jour (avec un maximum vers les 75e et 109e jours). Leurs poumons offraient des altérations intenses et contenaient de nombreux bacilles tuberculeux (de +++ à ++++).

Souris traitées, au nombre de 28. Parmi elles, 12 ont succombé entre le 94e et le 109e jour. Les poumons de ces souris, à l'encontre de ceux des sujets témoins, présentaient des lésions très légères, consistant en de petites taches grisâtres non confluentes. Par contre, les 16 autres souris ont survécu (56 %); elles ont été sacrifiées le 111e jour.

Souris survivantes, au moment où on les a examinées toutes avaient gagné du poids; cette augmentation pondérale a varié entre 1 et 8^{g} (en moyenne 4^{g},6). Les modifications microscopiques des poumons étaient à peine marquées (entre +—— et +), et dans un cas seulement la rate présentait des signes de nécrose.

(*) Séance du 19 mai 1948.

([1]) C. Levaditi et A. Vaisman, *Bull. Acad. Méd.*, 131, 1947, p. 173, 457, 671; 132, 1948, p. 65.

B. K. *dans les poumons.*

o...............	3		= 18,5 %
+ — — —.......	7	44,5 %	= 75,5 »
+ — —.........	5	31 »	
+.............	1		= 6,0 »

Il s'agit donc d'une absence microscopique totale des bacilles tuberculeux dans 18,5 %, d'une paucibacillose à peine apparente (+ — — — à + — —) dans 75,5 %, et d'une bacillose légèrement accentuée (+) dans 6 % des cas. Chez tous les sujets les bacilles de Koch étaient, pour la plupart, dégénérés et inclus dans des éléments granulo-adipeux, dont le nombre variait d'un animal à l'autre. Ajoutons que par trois fois la rate, par deux fois les ganglions lymphatiques périphériques, contenaient de très rares bacilles acido-résistants.

Virulence. — Les poumons paucibacillaires de quatre de ces souris ont été inoculés, par voie sous-cutanée, à des cobayes. Les résultats ont tous été positifs, après une incubation de 29 et 30 jours.

Conclusions. — Chez 56 % *des souris tuberculisées, puis traitées par des doses élevées de streptomycine, atteignant au total* 228000 U *par animal de* 20^{g}, *et administrées en l'espace de* 111 *jours, les effets curatifs se sont révélés remarquables tant du point de vue de l'aspect des lésions pulmonaires, qu'en ce qui concerne la teneur de ces lésions en bacilles acido-résistants. Toutefois, malgré ces effets thérapeutiques, il n'a pas été possible de réaliser une stérilisation radicale des poumons, qui se sont montrés virulents pour le Cobaye.*

A 15^{h}50^{m} l'Académie se forme en Comité secret.

COMITÉ SECRET.

La Section de Botanique, par l'organe de son Doyen, présente la liste suivante de candidats à la place vacante par le décès de M. *Pierre-Augustin Dangeard.*

En première ligne................	M. Raoul Combes.
En seconde ligne, ex æquo *et par ordre alphabétique*............	MM. Albert Goris. Lucien Plantefol.
En troisième ligne, ex æquo *et par ordre alphabétique*............	MM. André Guillaumin. Henri Humbert. Georges Mangenot.

Les titres de ces candidats sont discutés.

L'élection aura lieu en la prochaine séance publique.

La séance est levée à 17^{h} 20^{m}.

L. B.